IX OLIMPIADA CASTELLANO-LEONESA DE MATEMÁTICAS

FASE REGIONAL 2.001. BURGOS
Problemas Segundo Ciclo E.S.O.

1º.- TERNAS PITAGÓRICAS

La cultura mesopotámica se transmitió a la posteridad mediante un punzón o estilete sobre tablillas de arcilla blanda, luego cocidas en un horno o secadas al Sol. En una de ellas, conocida como la tablilla 322 de la colección Plimpton, han encontrado, los expertos en Historia se las Matemáticas, indicios sobrados de cómo pudieron llegar a construir hasta 38 ternas pitagóricas, o dicho de otro modo, grupos de tres números enteros (A, B, C) que cumplen la relación del Teorema de Pitágoras: $A^2 + B^2 = C^2$.
En la siguiente tabla se presentan algunas ternas pitagóricas:

Nº natural	Terna	Nº natural	Terna
3	3, 4, 5		
5	5, 12, 13	6	6, 8, 10
7	7, 24, 25	8	8, 15, 17
9	9,40,41	10	10, 24, 26

Descubrir la expresión general de las temas, en función del número natural de la primera columna de cada una de las tablas.

2º.- POLINOMIOS

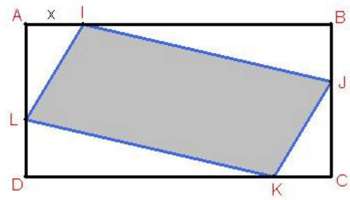
"*Otras veces tu problema, visto en su conjunto, resulta complicado e inabarcable. Escoge parte de él que parezca más simple, más a tu alcance, y enfréntate con ella para empezar*" (M. De Guzmán).
P(x) y Q(x) son dos polinomios con los coeficientes invertidos:

$$P(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$
$$Q(x)= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$$

Además debemos suponer que a_0 y a_n son no nulos. La pregunta es la siguiente:
¿Existe alguna relación entre las raíces o ceros de P(x) y Q(x)? (O lo que es lo mismo, entre las soluciones de las ecuaciones P(x) = 0 y Q(x) = O) Inténtalo desde lo fácil a lo difícil...

3º.- GEOMETRÍA

"*En la solución de todo problema hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto, pero si se pone a prueba la curiosidad que induce a inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo*" (G. Polya.)
En un rectángulo ABCD de dimensiones 8x4 se toman segmentos AI, BJ, CK, DL, todos iguales y de longitud x.
Se pide:
a) Expresar en función de x el área A(x) de la figura IJKL.
b) Encontrar el dominio y la gráfica de la función A(x).
c) Determinar los valores extremos (máximo y mínimo) de A(x) en su dominio de definición.



4º.- TRIÁNGULOS

La figura adjunta representa una sucesión de triángulos equiláteros de lados $OA_1 = 12$, $OA_2 = 17$, $OA_3 = 22$, $0A_4 = 27$, ...
En la misma figura se observa también una sucesión de trapecios. Si $S_1, S_2, S_3,... S_n$ es la sucesión de sus áreas respectivas se pide:

1) Clasificar la sucesión S_n: ¿Es una progresión? ¿de qué tipo?
2) Hallar la expresión de su término general.