

Problemas de la 6ª semana

2º ESO

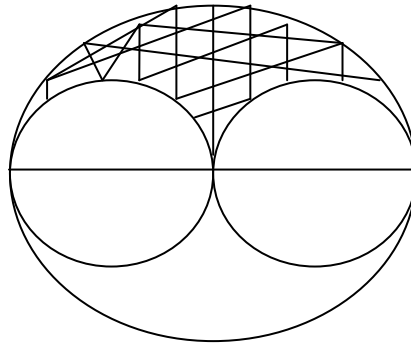
1º-) Si A, B y C son números naturales tales que

$$\frac{31}{4} = A + \frac{1}{B + \frac{1}{C+1}} \quad . \text{ Calcular } A^2 + B^2 + C^2$$

Solución:
$$\frac{31}{4} = 7 + \frac{3}{4} = 7 + \frac{1}{\frac{4}{3}} = 7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = 7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+1}}$$

Luego $A = 7; B = 1; C = 2 \Rightarrow A^2 + B^2 + C^2 = 54$

2º-) El área de la región sombreada es 2π . Calcular el área del círculo grande.



Solución: Sea r el radio del círculo pequeño, el área sombreada es

$$\frac{\pi \cdot (2r)^2}{2} - 2 \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{2} = 2\pi \Rightarrow \frac{4\pi \cdot r^2}{2} - \pi \cdot r^2 = 2\pi \Rightarrow \pi \cdot r^2 = 2\pi \Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

Área del círculo grande: $\pi(2 \cdot r)^2 = \pi \cdot 4 \cdot r^2 = 4\pi \cdot (\sqrt{2})^2 = 8\pi$

3º-) Hallar el número que admite sólo los factores primos 2 y 3 y la suma de sus divisores es 28.

Solución: El número será de la forma $N = 2^\alpha \cdot 3^\beta$

Las potencias de 2 son: 1 2 4 8 16

Si multiplicamos por 3 : 3 6 12 24 48

Luego el número es el 12.

Sus divisores son: 1, 2, 3, 4, 6, 12 y suman 28.

4º ESO

1º-) Encontrar un número de 3 dígitos que es 11 veces la suma de sus dígitos.

Solución: *El número es cba* $\Rightarrow a + 10b + 100c = 11(a + b + c) \Rightarrow 89c - b - 10a = 0$
 $89c = b + 10a \Rightarrow a = 8; \Rightarrow b = 9; \Rightarrow c = 1 \Rightarrow$ *el número es 198*

2º-) Si la solución de la inecuación $2x^2 + px + q < 0$ es el intervalo $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$, calcular $p + q$

Solución: $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 4$ son las soluciones de la ecuación

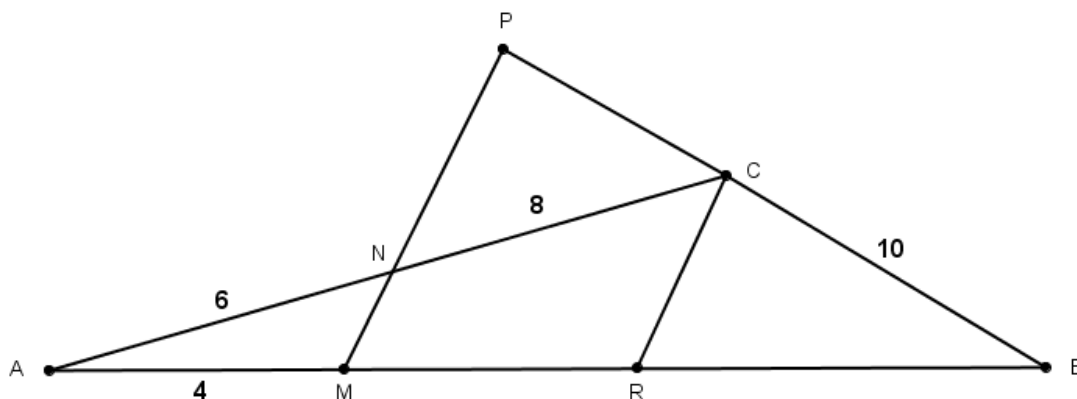
$2 \cdot x^2 + px + q = 0$; luego

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + p \cdot \frac{1}{2} + q = 0 \\ 2 \cdot 4^2 + p \cdot 4 + q = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{p}{2} + q = 0 \\ 32 + 4p + q = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p + 2q = -1 \\ 4p + q = -32 \end{array} \right\}$$

Resolviendo el sistema sale: $p = -9; q = 4 \Rightarrow p + q = -5$

3º-) Los lados de un triángulo ABC son: $a = 10$ cm; $b = 14$ cm; $c = 15$ cm. En el lado AB se tiene el punto M tal que $AM = 4$ cm, y en el AC el punto N tal que $AN = 6$ cm. Siendo P el punto de intersección de las rectas MN y BC, encontrar la razón $\frac{PB}{PC}$ y la medida de BP.

Solución:



Aplicando el teorema de Tales $\rightarrow \frac{6}{8} = \frac{4}{MR} \Rightarrow MR = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$

$$RB = 11 - \frac{16}{3} = \frac{17}{3} \rightarrow \text{Aplicando Tales otra vez} \rightarrow \frac{10}{PC} = \frac{\frac{17}{3}}{\frac{16}{3}} \Rightarrow PC = \frac{160}{17}$$

$$BP = PC + CB = 10 + \frac{160}{17} = \frac{330}{17} \Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{10 + \frac{160}{17}}{\frac{160}{17}} = \frac{33}{16}$$

Bachillerato

1º-) Hallar el mayor número natural n tal que 8^n divide a 44^{44}

Solución: $\frac{44^{44}}{8^n} = k$ siendo $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{(2^2 \cdot 11)^{44}}{(2^3)^n} = k \Rightarrow \frac{2^{88} \cdot 11^{44}}{2^{3n}} = k$

$2^{88-3n} \cdot 11^{44} = k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ luego $88 - 3n > 0 \Rightarrow 88 > 3n$ el mayor n que cumple esto es $n = 29$

2º-) Un polinomio $p(x)$ dividido por $(x + 1)$ da de resto -45 ; dividido por $(x - 3)$ da de resto -165 . ¿Qué resto dará al dividirlo por $(x + 1)(x - 3)$? Calcular $p(x)$ sabiendo, además, que es de 4º grado y divisible por $x(x^2 - 4)$.

Solución:

a) Aplicando el teorema del resto $p(-1) = -45 \rightarrow p(3) = -165$

El polinomio $p(x)$ será: $p(x) = t(x) \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) + r(x)$ donde $r(x)$ es un polinomio de primer grado $\rightarrow r(x) = mx + n \rightarrow p(x) = t(x) \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) + mx + n$

$$\begin{cases} p(-1) = -45 \Rightarrow -45 = -m + n \\ p(3) = -165 \Rightarrow -165 = m + n \end{cases} \rightarrow \text{Resolviendo el sistema} \rightarrow m = -30 \rightarrow n = -75$$

El resto es $r(x) = -30x - 75$

b) El polinomio de 4º grado es: $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = A(x) \cdot x \cdot (x^2 - 4)$

$$\left. \begin{cases} \text{Si } x = 0 \Rightarrow e = 0 \\ \text{Si } x = 2 \Rightarrow 16a + 8b + 4c + 2d = 0 \\ \text{Si } x = -2 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d = 0 \\ \text{Si } x = -1 \Rightarrow a - b + c - d = -45 \\ \text{Si } x = 3 \Rightarrow 81a + 27b + 9c + 3d = -165 \end{cases} \right\} \Rightarrow \text{Resolviendo} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -14 \\ c = -4 \\ d = 56 \end{cases}$$

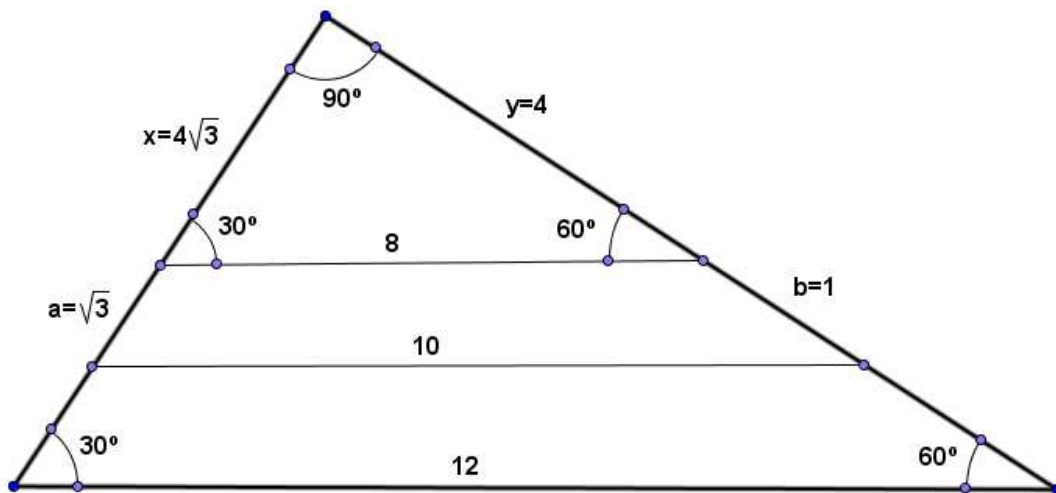
El polinomio es: $p(x) = x^4 - 14x^3 - 4x^2 + 56x$

3º-) Uno de los ángulos de un trapecio es 30° , y las prolongaciones de los lados no paralelos se cortan en ángulo recto. Encuentra el lado más pequeño del trapecio si su paralela media mide 10 cm y una de las bases mide 8 cm.

Solución: $\text{sen } 60^\circ = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 4\sqrt{3} \Rightarrow \text{sen } 30^\circ = \frac{y}{8} \Rightarrow y = 4$

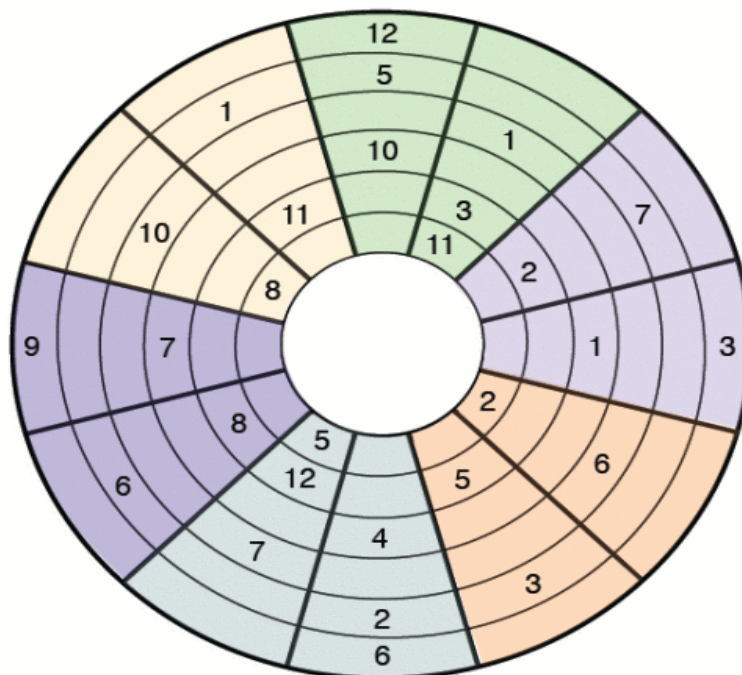
Aplicando la semejanza de triángulos $\frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+a} = \frac{4}{4+b} = \frac{8}{10}$

$\left\{ \begin{array}{l} 40 = 32 + 8b \Rightarrow b = 1 \\ 40\sqrt{3} = 32\sqrt{3} + 8a \Rightarrow a = \sqrt{3} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} l_1 = 2a = 2\sqrt{3} \\ l_2 = 2b = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{solución} \Rightarrow l_2 = 2$



Sudoku para todos los niveles

Completar todos los espacios vacíos con los números 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 y 12, de tal forma que ningún número se repite en cada una de las 6 circunferencias, en cada una de las 6 zonas del mismo color y en cada sector circular y su opuesto.



Solución:

