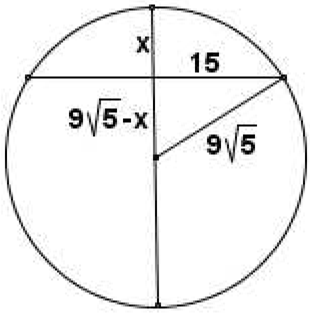
Problemas de la 13ª semana

2º de ESO

1º-) Hallar **x** si el diámetro del círculo es $18\sqrt{5}$



Solución:

$$\left(9\sqrt{5}-x\right)^2+15^2=\left(9\sqrt{5}\right)^2 \;\rightarrow\; 81\cdot 5+x_2-18\sqrt{5}\cdot x+225=81\cdot 5$$

$$x^2-18\sqrt{5}\cdot x+225=0 \;\rightarrow\; x=\frac{18\sqrt{5}\pm\sqrt{1620-900}}{2}=\frac{18\sqrt{5}\pm 12\sqrt{5}}{2}=3\sqrt{5}$$

2º-) Un rebaño de ovejas crece cada año en $\frac{1}{3}$ de su número y al final de cada año se venden 15. Después de vender las 15 del final del segundo año quedan 221 ovejas. ¿Cuántas había al principio?

Solución: Hay x ovejas

$$1^{er}\ \text{año} \;\rightarrow\; x+\frac{1}{3}x-15=\frac{4}{3}x-15$$

$$2^{\text{o}}\ \text{año} \;\rightarrow\; \left(\frac{4}{3}x-15\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}x-15\right)-15=221$$

$$\frac{4}{3}x-15+\frac{4}{9}x-5-15=221 \;\rightarrow\; \frac{16x}{9}=256 \;\rightarrow\; x=144\,\textit{ovejas}$$

3º-) AB y CA son números y A, B, C son dígitos distintos. Si cuatro veces AB es igual a CA, calcula los dígitos A, B, C.

Solución:

$$4\cdot AB=CA \;\rightarrow\; 4(B+10A)=A+10C \;\rightarrow\; 4B+40A=A+10C$$

$$39A+4B=10C \;\rightarrow\; A=2\ ;\ B=3\ ;\ C=9$$

4º de ESO

1º-) Calcular

$$\left[\frac{2007!+2004!}{2006!+2005!}\right]$$

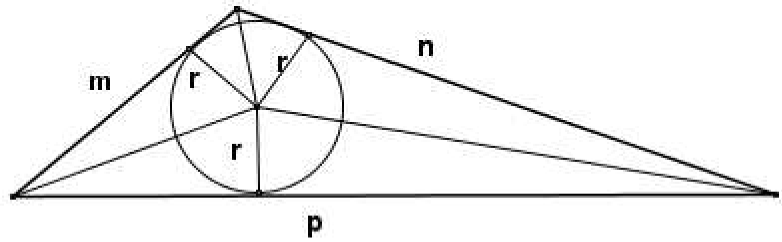
Donde $[x]$ significa la parte entera de X

Solución:

$$\left[\frac{2007\cdot 2006\cdot 2005\cdot 2004!+2004!}{2006\cdot 2005\cdot 2004!+2005\cdot 2004!}\right]= \textit{simplificando por } 2004! = \left[\frac{2007\cdot 2006\cdot 2005+1}{2006\cdot 2005+2005}\right]=$$

$$\left[\frac{2007\cdot 2006\cdot 2005+1}{2005(2006+1)}\right]=\left[\frac{2007\cdot 2006\cdot 2005+1}{2005\cdot 2007}\right]=\left[2006+\frac{1}{2005\cdot 2007}\right]=2006$$

2º-) Un triángulo tiene de perímetro **118 m**. y su círculo inscrito tiene de área $90\pi\ \mathrm{m}^2$ ¿Cuál es el área del triángulo?



Solución:

$$\textit{Área del círculo} = 90\pi = \pi\cdot r^2 \rightarrow r=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$$

$$\textit{Área triángulo} = \frac{p\cdot r}{2}+\frac{m\cdot r}{2}+\frac{n\cdot r}{2}=\frac{r}{2}(p+m+n)=\frac{r}{2}\cdot 118=\frac{3\sqrt{10}\cdot 118}{2}=177\sqrt{10}$$

3º-) Si a, b, c son números racionales y $60^a\cdot 24^b\cdot 50^c=45.000$, calcular a + b + c

Solución:

$$\left(2^2\cdot 3\cdot 5\right)^a\cdot\left(2^3\cdot 3\right)^b\cdot\left(2\cdot 5^2\right)^c=45.000$$

$$2^{2a}\cdot 3^a\cdot 5^a\cdot 2^{3b}\cdot 3^b\cdot 2^c\cdot 5^{2c}=45.000$$

$$2^{2a+3b+c}\cdot 3^{a+b}\cdot 5^{a+2c}=2^3\cdot 3^2\cdot 5^4$$

$$\left\{\begin{array}{l}2a+3b+c=3\\ a+b=2\\ a+2c=4\end{array}\right\}\textrm{Re}\,\textit{solviendo}\left\{\begin{array}{l}a=\dfrac{10}{3}\\ b=-\dfrac{4}{3}\\ c=\dfrac{1}{3}\end{array}\right\}\rightarrow a+b+c=\frac{7}{3}$$

Bachillerato

1º-) Calcular $\displaystyle\sum_{n=17}^{76}\frac{1}{n^2-9n+20}$

Solución:

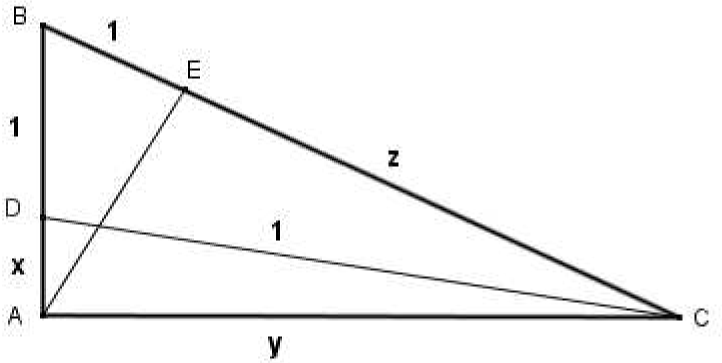
$$\sum_{n=17}^{76}\frac{1}{n^2-9n+20}=\sum_{n=17}^{76}\frac{1}{(n-5)(n-4)}=\sum_{n=17}^{76}\left(\frac{1}{n-5}-\frac{1}{n-4}\right)=$$

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{14}+\frac{1}{14}-\frac{1}{15}+\frac{1}{15}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\dots\dots\dots\dots\dots-\frac{1}{71}+\frac{1}{71}-\frac{1}{72}=$$

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{72}=\frac{5}{72}$$

2º-) Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Sea D un punto en AB tal que CD = 1. AE es la altura de A a BC. Si BD = BE = 1, calcular la longitud de AD.

Solución:



$$\begin{Bmatrix} x^2+y^2=1 \\ (1+x)^2+y^2=(1+z)^2 \\ (1+x)^2-1=y^2-z^2 \end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix} x^2+y^2=1 \\ x^2+2x=y^2-z^2 \\ x^2+2x=z^2+2z-y^2 \end{Bmatrix}\rightarrow y^2=1-x^2$$

$$\begin{Bmatrix} x^2+2x=1-x^2-z^2 \\ x^2+2x=z^2+2z-1+x^2 \end{Bmatrix}\rightarrow x=\frac{z^2+2z-1}{2}$$

$$2x^2+2x=1-z^2 \;\rightarrow\; 2x(x+1)=1-z^2$$

$$\left(z^2+2z-1\right)\left(\frac{z^2+2z-1}{2}+1\right)=1-z^2 \;\rightarrow\; operando$$

$$z^4+4z^3+6z^2-3=0$$

Factorizando $\rightarrow$ $z^4+4z^3+6z^2-3=(z+1)\left(z^3+3z^2+3z-3\right)$

$z=-1 \rightarrow x=-1 \rightarrow imposible$

$z^3+3z^2+3z-3=0 \rightarrow (z+1)^3-4=0 \rightarrow z+1=\sqrt[3]{4}$

$z=\sqrt[3]{4}-1$

$$x=\frac{z^2+2z-1}{2}=\frac{(z+1)^2-2}{2}=\frac{\sqrt[3]{4^2}-2}{2}=\frac{\sqrt[3]{2^4}-2}{2}=\frac{2\sqrt[3]{2}-2}{2}=\sqrt[3]{2}-1$$

3º-) Sean x, y, z números complejos tales que:

$x+y+z=2$; $x^2+y^2+z^2=3$; $x\cdot y\cdot z=4$

Calcular: $\dfrac{1}{xy+z-1}+\dfrac{1}{yz+x-1}+\dfrac{1}{zx+y-1}$

Solución:

$$\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}=$$

$$\frac{1}{xy+2-x-y-1}+\frac{1}{yz+2-y-z-1}+\frac{1}{zx+2-x-z-1}$$

$$\frac{1}{xy-x-y+1}+\frac{1}{yz-y-z+1}+\frac{1}{zx-x-z+1}=$$

$$\frac{1}{x(y-1)-(y-1)}+\frac{1}{y(z-1)-(z-1)}+\frac{1}{z(x-1)-(x-1)}=$$

$$\frac{1}{(x-1)(y-1)}+\frac{1}{(y-1)(z-1)}+\frac{1}{(z-1)(x-1)}=$$

$$\frac{z-1+x-1+y-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}=\frac{2-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}=\frac{-1}{xyz-xz-yz+z-xy+x+y-1}=$$

$$\frac{-1}{4+2-1-(xy+xz+yz)}=(**)$$

$pero\ teniendo\ presente\ que\ (x+y+z)^2==x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$

$$4=3+2(xy+xz+yz) \rightarrow (xy+yz+xz)=\frac{1}{2}$$

$$luego \rightarrow (**)\quad \frac{-1}{5-\frac{1}{2}}=\frac{-2}{9}$$