Problemas de la 31ª semana

2º ESO

1º-) Una esfera tiene la misma superficie que volumen. Calcular el volumen.

Solución:

Superficie = volumen $\Rightarrow 4\pi \cdot r^2 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \Rightarrow 1 = \frac{r}{3} \Rightarrow r = 3$

Volumen $= \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$

2º-) Calcular: $2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}$

Solución:

$$4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 4 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{14}{3}}} = \frac{1}{3 + \frac{3}{14}} = \frac{1}{\frac{45}{14}} = \frac{14}{45}$$

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{14}{45}} = 2 + \frac{1}{\frac{59}{45}} = 2 + \frac{45}{59} = \frac{118 + 45}{59} = \frac{163}{59}$$

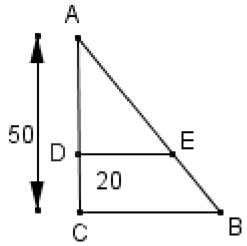
3º-) Calcular: $71_9 - 61_8 + 51_7 - 41_6 + 31_5 - 21_4$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 71_9 = 1 + 7 \cdot 9 = 64 \\ 61_8 = 1 + 6 \cdot 8 = 49 \\ 51_7 = 1 + 5 \cdot 7 = 36 \\ 41_6 = 1 + 4 \cdot 6 = 25 \\ 31_5 = 1 + 3 \cdot 5 = 16 \\ 21_4 = 1 + 2 \cdot 4 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 64 - 49 + 36 - 25 + 16 - 9 = 33$$

4º ESO

1º-)



Un triángulo rectángulo ABC tiene de altura 50cm. Se dibuja una línea DE paralela a la base que dista de ella 20cm. Si el área del trapecio rectángulo DEBC es $320\,cm^2$, calcular CB.

Solución:

Área trapecio DEBC $\Rightarrow 320 = \frac{x+y}{2} \cdot 20 \Rightarrow x + y = 32$

Los triángulos ADE y ACB son semejantes $\Rightarrow \frac{30}{50} = \frac{y}{x} \Rightarrow 3x = 5y$

Resolviendo el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 32 \\ 3x = 5y \end{array} \right\} \Rightarrow x = 20\,cm$

2º-) Hallar A, B, C y D en la expresión: $\frac{62}{19} = A + \cfrac{1}{B + \cfrac{1}{C + \cfrac{1}{D}}}$

Solución:

$$\frac{62}{19} = 3 + \frac{5}{19} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{19}{5}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{4}}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}} \Rightarrow A = 3; B = 3; C = 1; D = 4$$

3º-) Sea f(x) = a·x+b. Si f(6) – f(2) = 12 , calcular f(12) - f(2).

Solución:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(6) = 6a + b \\ f(2) = 2a + b \end{array} \right\} \Rightarrow f(6) - f(2) = 4a \rightarrow 4a = 12 \rightarrow a = 3$$

$$f(x) = 3x + b \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(12) = 36 + b \\ f(2) = 6 + b \end{array} \right\} \rightarrow f(12) - f(2) = 30$$

Bachillerato

1º-) Demostrar que $2222^{5555}+5555^{2222}$ es múltiplo de 7.

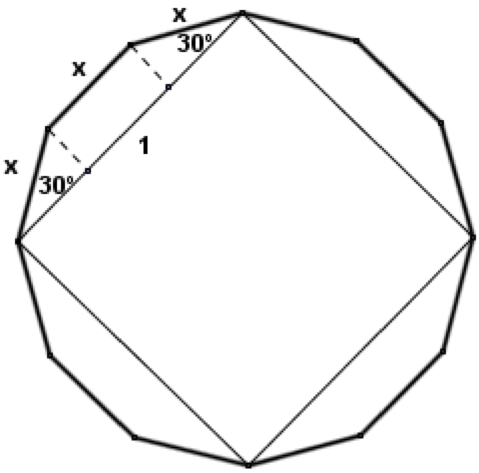
Solución:

$$2222^{5555} \rightarrow 2222 = 3(mód\,7) \Rightarrow 2222^{5555} = 3^{5555}(mód\,7) = \left(3^{6}\right)^{925}\cdot 3^{5}(mód\,7) = pero \rightarrow$$
$$3^{6} = 3^{7-1} \equiv 1(mód\,7) \rightarrow luego \rightarrow \left(3^{6}\right)^{925}\cdot 3^{5}(mód\,7) \equiv 3^{5}(mód\,7) \equiv 5(mód\,7)$$

$$5555^{2222} \rightarrow 5555 \equiv 4(mód\,7) \Rightarrow 5555^{2222} \equiv 4^{2222}(mód\,7) = \left(4^{6}\right)^{370}\cdot 4^{2}(mód\,7) \equiv$$
$$\equiv 4^{2}(mód\,7) = 2(mód\,7)$$
$$2222^{5555}+5555^{2222} \equiv 5+2(mód\,7) \equiv 0(mód\,7)$$

2º-) Un cuadrado está inscrito en un dodecágono regular uniendo cada 3 vértices. Si el lado del cuadrad es 1, ¿cuál es el lado del dodecágono?

Solución:



Ángulo interior del dodecágono: $\frac{360º}{12} = 30º \Rightarrow 180º - 30º = 150º$

$150º - 90º = 60º \rightarrow 60º : 2 = 30º$

Luego: $x\cos 30º + x + x\cos 30º = 1$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + x + \frac{\sqrt{3}}{2}x = 1 \rightarrow \sqrt{3}x + x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

3º-) Resolver la ecuación : $\frac{1}{senx}-\frac{1}{sen2x}=\frac{2}{sen4x}$

Solución:

$$\frac{1}{senx}-\frac{1}{2senx\cos x}=\frac{2}{2sen2x\cos 2x}\Rightarrow \frac{1}{senx}[1-\frac{1}{2\cos x}]=\frac{1}{2senx\cos x\cdot\cos 2x}\Rightarrow$$

simplificamos por senx ya que $\rightarrow senx\neq 0$

$$1-\frac{1}{2\cos x}=\frac{1}{2\cos x(\cos^2 x-sen^2 x)}\Rightarrow\frac{2\cos x-1}{2\cos x}=\frac{1}{2\cos x(\cos^2 x-sen^2 x)}\Rightarrow$$

simplificamos por cos$x$ *ya que* $\rightarrow \cos x\neq 0$

$$(2\cos x-1)\cdot(\cos^2 x-sen^2 x)=1\Rightarrow$$

$$(2\cos x-1)\cdot(\cos^2 x-1+\cos^2 x)=1\Rightarrow$$

$$4\cos^3 x-2\cos x-2\cos^2 x+1=1\Rightarrow$$

$$2\cos x[2\cos^2 x-\cos x-1]=0\Rightarrow\cos x\neq 0$$

$$2\cos^2 x-\cos x-1=0\Rightarrow\cos x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}\rightarrow\cos x=1\rightarrow\cos x=-\frac{1}{2}$$

$x=0º\rightarrow x=120º\rightarrow x=240º$

$x=0º \Rightarrow$ *no vale.*

$x=120º \Rightarrow$ *vale.*

$x=240º \Rightarrow$ *vale*