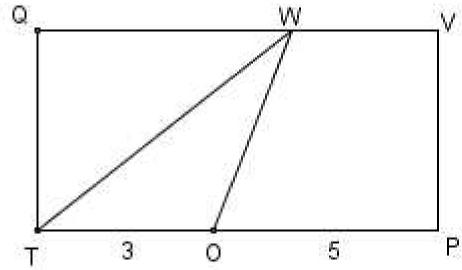
Problemas de la 29ª semana

2º ESO

1º-) Calcular la razón entre las áreas del triángulo TWO y el rectángulo QVPT.



Solución:

$$R = \frac{\text{área triángulo TWO}}{\text{área .rectángulo QVPT}} = \frac{\frac{3 \cdot VP}{2}}{8 \cdot VP} = \frac{\frac{3}{2}}{8} = \frac{3}{16}$$

2-) Escribe, en cada sucesión, los 6 términos siguientes.
a) 1, 3, 5, ...b) 1, 1, 2, 3, ...c) 1, 4, 9, ...
d) 7, 9, 5, 11, 3, ...e) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$,...................

Solución:

a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17. b) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.
c) 1, 4, 9,16, 25, 36,49, 64, 81. d) 7, 9, 5, 11, 3, 13, 1, 15, -1, 17, -3.
e) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{48}, \frac{1}{96}, \frac{1}{192}, \frac{1}{384}, \frac{1}{768}, \frac{1}{1536}$.

3º-) Escribir en orden creciente los números: 2^{1000}, 3^{600}, 10^{300}

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 2^{1000} = \left(2^{10}\right)^{100} = (1024)^{100} \\ 3^{600} = \left(3^{6}\right)^{100} = (729)^{100} \\ 10^{300} = \left(10^{3}\right)^{100} = (1000)^{100} \end{array}\right\} \Rightarrow 3^{600} < 10^{300} < 2^{1000}$$

4ºESO

1º-) Un cubo y una esfera tienen la misma superficie (área). Calcular la razón del volumen de la esfera al volumen del cubo.

Solución:

Superficie del cubo = $6a^2$, siendo a = arista
Superficie de la esfera = $4\pi \cdot r^2$, siendo r = radio

$$6a^2 = 4\pi \cdot r^2 \Rightarrow \frac{r^2}{a^2} = \frac{3}{2\pi} \Rightarrow \frac{r}{a} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$$

$$R=\frac{Volumen..esfera}{Volumen..cubo}=\frac{\frac{4}{3}\pi\cdot r^3}{a^3}=\frac{4\pi\cdot r^3}{3a^3}=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{r^2}{a^2}\cdot\frac{r}{a}=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{3}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{3}{2\pi}}=2\sqrt{\frac{3}{2\pi}}=\sqrt{\frac{12}{2\pi}}=\sqrt{\frac{6}{\pi}}$$

2º-) El primer término de una progresión geométrica infinita es 10 y la suma de la progresión geométrica esta entre 9 y 11 ambos incluidos. ¿ Entre qué valores esta la razón?

Solución:

$$a_1=10\Rightarrow S=\frac{a_1}{1-r}\rightarrow 9\le\frac{10}{1-r}\le 11\Rightarrow 9\le\frac{10}{1-r}\Rightarrow\frac{9}{10}\le\frac{1}{1-r}\Rightarrow\frac{10}{9}\ge 1-r$$

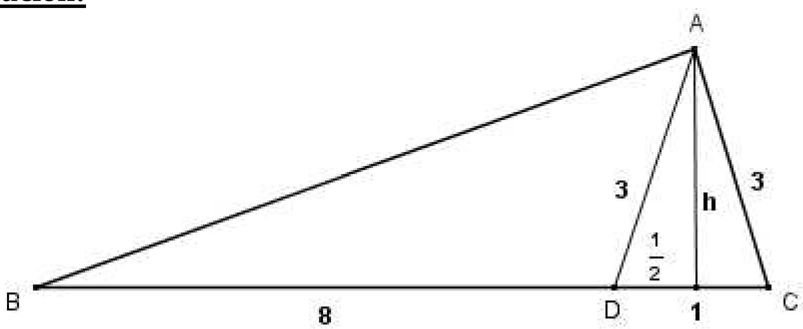
$$\Rightarrow r\ge 1-\frac{10}{9}\Rightarrow r\ge-\frac{1}{9}$$

$$\frac{10}{1-r}\le 11\Rightarrow\frac{1}{1-r}\le\frac{11}{10}\Rightarrow 1-r\ge\frac{10}{11}\Rightarrow 1-\frac{10}{11}\ge r\Rightarrow r\le\frac{1}{11}$$

$$-\frac{1}{9}\le r\le\frac{1}{11}$$

3º-) Sea ABC un triangulo; el punto D esta en BC de tal forma que AC = 3, AD = 3, BD = 8, CD = 1. Calcular AB.

Solución:



Calculamos h:

$$h=\sqrt{3^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{9-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{35}{4}}=\frac{\sqrt{35}}{2}$$

$$\overline{AB}^2=\left(8+\frac{1}{2}\right)^2+h^2=\left(\frac{17}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{35}}{2}\right)^2=\frac{289}{4}+\frac{35}{4}=\frac{324}{4}=81$$

$$\overline{AB}=\sqrt{81}=9$$

Bachillerato

1º-) Las raíces de la ecuación $x^2 - bx + c = 0$ son: $\text{sen}\left(\frac{\pi}{9}\right)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$. Calcular b en función de c.

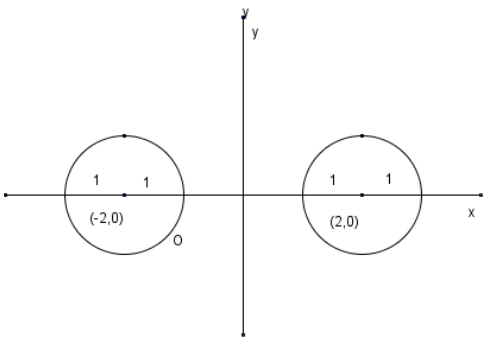
Solución:

Según Cardano: $\left\{\begin{array}{l} sen\left(\frac{\pi}{9}\right)+\quad \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)=b \\ sen\left(\frac{\pi}{9}\right)\cdot \quad \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)=c \end{array}\right\} \Rightarrow$ *Elevando al cuadrado la 1ª igualdad*

$$sen^2\left(\frac{\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right)+2sen\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)=b^2 \rightarrow 1+2c=b^2 \rightarrow b=\sqrt{1+2c}$$

2º-) Sea A el conjunto de puntos (x, y) del plano que verifican: $x^2 - 4|x| + y^2 + 3 \le 0$.
Calcular el área de A.

Solución:



$$|x| = \left\{\begin{array}{lll} x & si & x \ge 0 \\ -x & si & x < 0 \end{array}\right\}$$

$Si\ \ x \ge 0 \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 + 3 \le 0 \Rightarrow$

$(x-2)^2 + y^2 - 4 + 3 \le 0 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 \le 1$

circunferencia de centro (2,0) y radio = 1

$Si\ \ x < 0 \Rightarrow x^2 + 4x + y^2 + 3 \le 0 \Rightarrow$

$(x+2)^2 + y^2 - 4 + 3 \le 0 \Rightarrow (x+2)^2 + y^2 \le 1$

circunferencia de centro (-2,0) y radio = 1

Área $= 2\cdot\pi\cdot 1^2 = 2\pi$

3º-) Calcular x

$$x = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}}}} .$$

Solución:

Sustituyendo x en la expresión dada:

$x = \frac{1}{1+x} \Rightarrow x + x^2 = 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ luego;

$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$