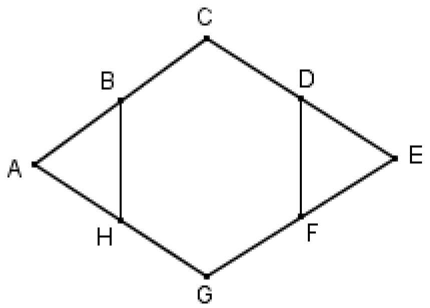
Problemas de la 24ª semana

2º ESO

1º-) En la figura, ACEG es un paralelogramo y BCDFGH es un hexágono regular. Si CG = 10, calcular AH.



Solución:

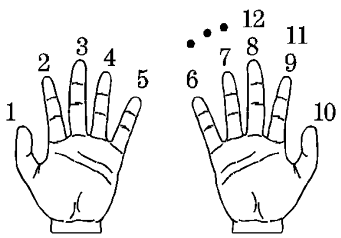
$CG = 10 \rightarrow BH = \frac{1}{2} CG = 5$

$$\left.\begin{cases} El\ \ ángulo\ \ CBH = 120º \rightarrow ángulo\ \ ABH = 60º \\ El\ \ ángulo\ \ \mathrm{GHB} = 120º \rightarrow ángulo\ \ AHB = 60º \end{cases}\right\} \rightarrow ángulo\ \ \hat{A} = 60º \rightarrow$$

$triángulo\ \ \mathrm{ABH}\ \ equilátero \rightarrow AH = BH = 5$

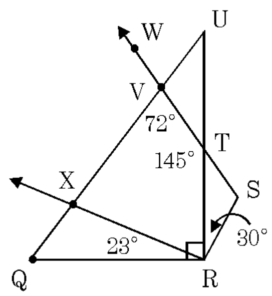
2º-) Una persona cuenta los números naturales con sus dedos como se indica en la figura. No puede haber dos números en un dedo. ¿En qué dedo estará el número 2009? La respuesta se dará con un número del 1 al 10.

Solución:



En el dedo 1 están los números 1, 19, 37, 55, ········ → Se van sumando 18 cada vez.
1 + 18·n (n = 0, 1, 2, 3, 4 ······) tiene que ser 2009 o cerca de él.
Si n = 111 → 1 + 18·111 = 1999, luego en el dedo 1 está el número 1999 → el número 2009 estará en el dedo 9.

3º-) En la figura, ¿cuál es la medida del ángulo $V\hat{T}U$?



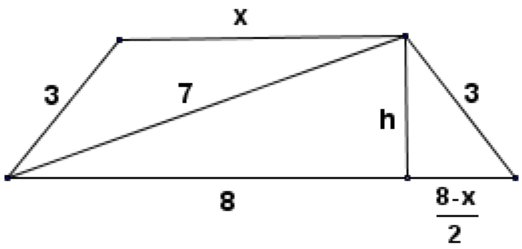
Solución:

$R\hat{T}S = 180º - 145º = 35º = V\hat{T}U \rightarrow$ por opuestos por el vértice

4º ESO

1º-) En un trapecio isósceles la longitud de los lados es 3, la longitud de las diagonales 7 y la base mayor mide 8. Calcular la base menor.

Solución:



$$\left.\begin{cases} h^2 = 3^2 - \left(\dfrac{8-x}{2}\right)^2 \\ h^2 = 7^2 - \left[8 - \left(\dfrac{8-x}{2}\right)\right]^2 \end{cases}\right\} \rightarrow$$

$$9 - \left(\frac{8-x}{2}\right)^2 = 49 - 64 - \left(\frac{8-x}{2}\right)^2 + 16 \cdot \left(\frac{8-x}{2}\right)$$

$$9 = -15 + 64 - 8x \rightarrow 8x = 40 \rightarrow x = 5$$

2º-) Se define la operación $\oplus$ por $a \oplus b = \dfrac{a-b}{a+b}$. Calcular todos los valores c tal que $(1 \oplus 2) \oplus c = 1 \oplus (2 \oplus c)$

Solución:

$$(1 \oplus 2) = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3} \rightarrow (1 \oplus 2) \oplus c = \frac{-\frac{1}{3} - c}{-\frac{1}{3} + c} = \frac{1+3c}{1-3c}$$

$$\rightarrow$$

$$(2 \oplus c) = \frac{2-c}{2+c} \rightarrow 1 \oplus (2 \oplus c) = \frac{1 - \frac{2-c}{2+c}}{1 + \frac{2-c}{2+c}} = \frac{2+c-2+c}{2+c+2-c} = \frac{c}{2}$$

$$\left\{\frac{1+3c}{1-3c} = \frac{c}{2} \rightarrow 2 + 6c = c - 3c^2 \rightarrow 3c^2 + 5c + 2 = 0 \rightarrow c = -\frac{3}{2} \rightarrow c = -1\right\}$$

3º-) Supongamos que a y b son dos números reales distintos de cero y que la ecuación $x^2 + ax + b = 0$ tiene por soluciones a y b. Calcular a y b.

Solución:

Si $x_1 = a$ y $x_2 = b$ *son* las soluciones de la ecuación $x^2 + ax + b = 0 \rightarrow$ *se verifica*

$$\begin{Bmatrix} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 \cdot x_2 = b \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a + b = -a \\ a \cdot b = b \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} b = -2a \\ a = 1 \rightarrow b \neq 0 \end{Bmatrix} \rightarrow b = -2$$

Bachillerato

1º-) Calcular $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+1)!}$

Solución:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2\cdot n!}$$

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)^2}=\frac{A}{n}+\frac{B}{(n+1)^2}+\frac{C}{(n+1)}=\frac{A(n+1)^2+Bn+Cn(n+1)}{n\cdot(n+1)^2}$$

$$1=A(n+1)^2+Bn+Cn(n+1)\rightarrow\begin{Bmatrix} n=0\rightarrow A=1 \\ n=-1\rightarrow B=-1 \\ n=1\rightarrow 1=4A+B+2C\rightarrow C=-1\end{Bmatrix}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2\cdot n!}=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)^2\cdot n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=$$

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1!}-\frac{1}{4\cdot 1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}-\frac{1}{9\cdot 2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3!}-\frac{1}{16\cdot 3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4!}-\frac{1}{25\cdot 4!}-\frac{1}{5!}\cdots\cdots\cdots=$$

$$Simplificando\rightarrow 1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=3-e$$

2º-) Sea z un número complejo tal que $z\neq 1$ y $z^3=1$, calcular $\left(1-z+z^2\right)\cdot\left(1+z-z^2\right)$

Solución:

$$z^3=1\rightarrow z=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1_0}\rightarrow\begin{Bmatrix} z_1=1_0=1 \\ z_2=1_{120^\circ}=\cos 120^\circ + isen120^\circ=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_3=1_{240^\circ}=\cos 240^\circ + isen240^\circ=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{Bmatrix}$$

a) Si $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\rightarrow\left(1-z+z^2\right)\cdot\left(1+z-z^2\right)=1-z^2+2z^3-z^4=$

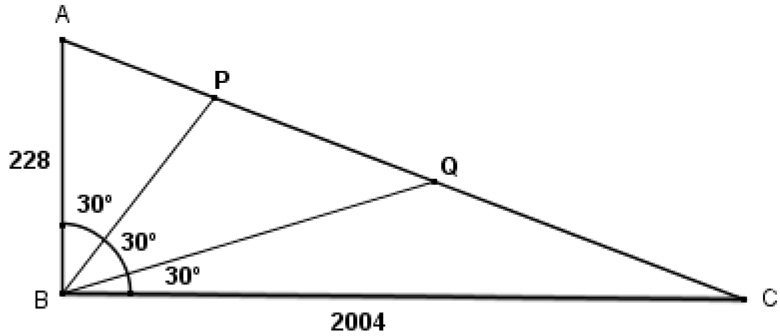
$$1-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+2\cdot 1-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4=3-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=4$$

b) Si $z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\rightarrow 1-z^2+2z^3-z^4=1-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+2\cdot 1-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4=$

$$1-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+2-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=4$$

3º-) Sea ABC un triángulo rectángulo en B, siendo AB = 228 y BC = 2004. El ángulo B es dividido en 3 partes iguales, y los segmentos que lo dividen cortan a AC en P y Q de tal forma que A, P, Q, C están en AC en ese orden. Calcular (PB + BC)·(QB + AB)

Solución:



$$(PB+BC)(QB+AB)=(PB+2004)(QB+228)=PB\cdot QB+228\cdot PB+2004\cdot QB+2004\cdot 228$$

$$\textit{área triángulo } ABC=\textit{área triángulo } QBC+\textit{área triángulo } PAB+\textit{área triángulo } PBQ$$

$$\frac{2004\cdot 228}{2}=\frac{2004\cdot QB\cdot \frac{1}{2}}{2}+\frac{228\cdot PB\cdot \frac{1}{2}}{2}+\frac{QB\cdot PB\cdot \frac{1}{2}}{2}\rightarrow$$

$$2\cdot 2004\cdot 228=2004\cdot QB+228\cdot PB+QB\cdot PB$$

Luego $\rightarrow$ $(PB+BC)(QB+AB)=2\cdot 2004\cdot 228+2004\cdot 228=3\cdot 2004\cdot 228=1.370.736$