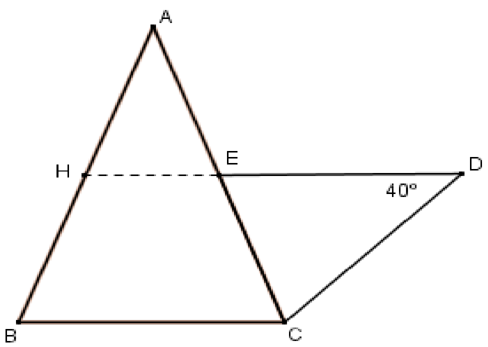
Problemas de la 23ª semana

2º ESO

1º-) En la figura, AB=AC y DE=DC. Si DE es paralelo a BC y el ángulo D = 40º, calcular el ángulo A.

Solución:



Prolongamos la recta DE hasta H. El triángula DEC es isósceles $\hat{E} = \hat{C} = \dfrac{180º – 40º}{2} = 70º$

El triángulo AHE es isósceles $\hat{A} = 180º – \left(\hat{H} + \hat{E}\right) = 180 - (70º + 70º) = 40º$

2º-) Calcular: $81^{-\left(2^{-2}\right)}$

Solución:

$$81^{-\left(\frac{1}{2^2}\right)} = 81^{-\frac{1}{4}} = \left(3^4\right)^{-\frac{1}{4}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

3º-) Si dividimos D por N, el cociente es Q y el resto es R. ¿Cuál es el resto si dividimos D – R por Q?

Solución:

Se verifica que: $D = Q \cdot N + R \rightarrow$ luego $D - R = Q \cdot N$ entonces $\rightarrow$ Resto=0

4º ESO

1º-) La ecuación $x^2 - px + (2p + 8) = 0$ tiene dos raíces, una doble de la otra. ¿Cuáles son los valores de p?

Solución:

$$\left.\begin{cases} x_1 + x_2 = p \\ x_1 . x_2 = 2p + 8 \\ x_2 = 2 \cdot x_1 \end{cases}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \rightarrow x_1 + 2x_1 = p \rightarrow 3x_1 = p \rightarrow x_1 = \dfrac{p}{3} \\ \rightarrow \dfrac{p}{3} \cdot 2 \cdot \dfrac{p}{3} = 2p + 8 \rightarrow \dfrac{2p^2}{9} - 2p - 8 = 0 \rightarrow p^2 - 9p - 36 = 0 \rightarrow \end{array}\right\}$$

$$p = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 144}}{2} \Rightarrow p = 12;\ p = -3$$

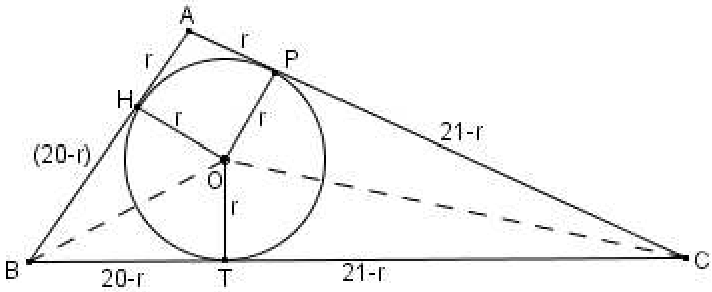
2º-) Calcular el producto $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)................\left(1-\frac{1}{2005}\right)$

Solución:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)................\left(1-\frac{1}{2005}\right)= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}..........\frac{2004}{2005}=\frac{1}{2005}$$

3º-) Los lados de un triángulo rectángulo son 20, 21 y 29.Calcular el radio del circulo inscrito.

Solución:



La figura AHOP es un cuadrado de lado r.
Los triángulos BHO y BOT son iguales y los triángulos OPC y OTC también son iguales; luego:

$20-r+21-r=29$

$41-2r=29\rightarrow$

$r=6$

Bachillerato

1º-) Sean a, b y c las raíces de la ecuación $x^3-x-1=0$. Calcular $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$

Solución:

Aplicando las formulas de Cardano - Vieta:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a\cdot b+b\cdot c+a\cdot c=-1 \\ abc=1 \end{array}\right\}\rightarrow \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=\frac{1+c+b+bc+1+c+a+ac+1+a+b+ab}{(1+a)(1+b)(1+c)}=$$

$$=\frac{3+2(a+b+c)+bc+ab+ac}{(1+b+a+ab)(1+c)}=\frac{3+2\cdot 0+(-1)}{1+b+a+ab+c+cb+ca+abc}=$$

$$=\frac{3-1}{1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc}=\frac{2}{1+0-1+2}=2$$

2º-) Calcular $1\cdot\binom{2007}{1}+2\cdot\binom{2007}{2}+3\cdot\binom{2007}{3}+\dots\dots\dots\dots.2007\cdot\binom{2007}{2007}$

Solución:

$$(1+x)^{2007}=\binom{2007}{0}\cdot 1^{2007}+\binom{2007}{1}\cdot 1^{2006}\cdot x+\binom{2007}{2}\cdot 1\cdot x^2+\dots\dots\binom{2007}{2006}\cdot x^{2006}+\binom{2007}{2007}\cdot x^{2007}$$

Derivo:

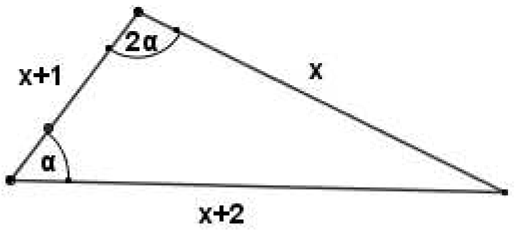
$$2007(1+x)^{2006}=\binom{2007}{1}\cdot 1+\binom{2007}{2}\cdot 2x+\binom{2007}{3}\cdot 3x^2+\dots\dots\binom{2007}{2006}\cdot 2006x^{2005}+\binom{2007}{2007}\cdot 2007x^{2006}$$

Si x=1

$$2007\cdot 2^{2006}=\binom{2007}{1}\cdot 1+\binom{2007}{2}\cdot 2+\binom{2007}{3}\cdot 3+\dots\dots\binom{2007}{2006}\cdot 2006+\binom{2007}{2007}\cdot 2007$$

3º-) Las longitudes de los lados de un triángulo son tres números enteros consecutivos. Si el ángulo mayor es dos veces el menor, calcular los lados del triangulo.

Solución:



Aplicando los teoremas de los senos y cosenos:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2=(x+1)^2+(x+2)^2-2(x+1)(x+2)\cos\alpha \\ \dfrac{x}{sen\alpha}=\dfrac{x+2}{sen2\alpha} \end{array}\right\}$$

$$\frac{x}{sen\alpha}=\frac{x+2}{2sen\alpha\cos\alpha}\Rightarrow\frac{x}{1}=\frac{x+2}{2\cos\alpha}\rightarrow\cos\alpha=\frac{x+2}{2x}$$

$$x^2=x^2+2x+1+x^2+4x+4-2(x+1)(x+2)\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{x^2+6x+5}{2(x+1)(x+2)}=\frac{(x+1)(x+5)}{2(x+1)(x+2)}=\frac{x+5}{2(x+2)}$$

Sustituyendo $\cos\alpha$

$$\frac{x+2}{2x}=\frac{x+5}{2(x+2)}\Rightarrow(x+2)^2=x(x+5)\Rightarrow x=4$$

Los lados son 4, 5 y 6