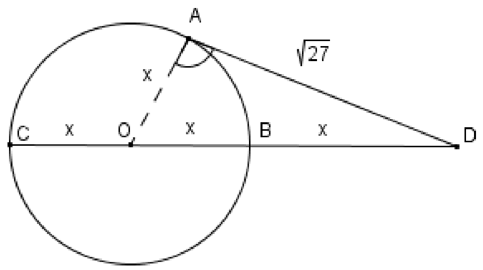
Problemas de la 22ª semana

2º ESO

1º-) En la figura, O es el centro del círculo, DA es un segmento tangente, DB=BO=OC y DA=$\sqrt{27}$. Calcular el radio del círculo.

Solución:



$x^2+\left(\sqrt{27}\right)^2=(2x)^2$

$x^2+27=4x^2$

$27=3x^2$

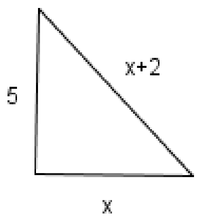
$x^2=9$

$x=3$

Radio=3

2º-) Calcular el perímetro de un triángulo rectángulo si un cateto mide 5 cm y la hipotenusa es 2 cm mayor que el otro cateto.

Solución:



$x^2+5^2=(x+2)^2 \rightarrow x^2+25=x^2+4x+4 \rightarrow$

$4x=21 \rightarrow x=\dfrac{21}{4}=5{,}25 \rightarrow$

$P=5+5{,}25+5{,}25+2=17.5cm$

3º-) Calcular $\dfrac{2^{2004}+2^{2001}}{2^{2003}-2^{2000}}$

Solución:

$$\frac{2^{2004}+2^{2001}}{2^{2003}-2^{2000}}=\frac{2^{2001}\left(2^3+1\right)}{2^{2000}\left(2^3-1\right)}=\frac{2\cdot 9}{7}=\frac{18}{7}$$

4º ESO

1º-) Sea la sucesión $a_1=2$ y $a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$. Calcular a_{203}.

Solución:

$$a_1=2\,;\; a_2=\frac{1}{3};\;\; a_3=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{-1}{2}\;\;;\;\; a_4=\frac{\frac{-1}{2}-1}{\frac{-1}{2}+1}=-3\;\;;\;\; a_5=2$$

Se repiten de 4 en 4 ; luego 2003: 4 da de resto 3. $\rightarrow\; a_{2003}=a_3=\dfrac{-1}{2}$

2º-) Sea $A = 1^{-4} + 2^{-4} + 3^{-4} + 4^{-4} + 5^{-4} + \ldots\ldots\ldots$ y sea $B = 1^{-4} + 3^{-4} + 5^{-4} + 7^{-4} + \ldots\ldots$
Calcular $\frac{A}{B}$

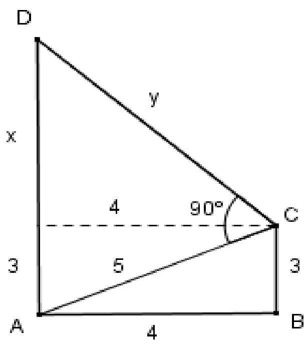
Solución:

$$B = A - \left(2^{-4} + 4^{-4} + 6^{-4} + ...\right) = A - \frac{1}{16}\left(1^{-4} + 2^{-4} + 3^{-4} + ...\right) = A - \frac{1}{16}A = A\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{15}{16}A$$

$$\frac{A}{B} = \frac{16}{15}$$

3º-) En la figura, AD y BD son perpendiculares a AB, y CD es perpendicular a AC. Si AB = 4 y BC = 3, calcular CD.

Solución:



Aplicando el teorema de la altura al triangulo ACD

16=3x $\rightarrow$ x $= \frac{16}{3}$

Luego: $x^2 + 4^2 = y^2 \rightarrow \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16 = y^2 \rightarrow y = \frac{20}{3}$

BACHILLERATO

1º-) Calcular el menor ángulo positivo que verifica la ecuación:
$8 \cdot sen(x) \cdot \cos^5(x) - 8 \cdot sen^5(x) \cdot \cos(x) = 1$

Solución:

Sacando factor común:
$$8senx\cos x\left\{\cos^4 x - sen^4 x\right\} = 1 \rightarrow 8senx\cos x\left\{\cos^2 x - sen^2 x\right\}\left[\cos^2 x + sen^2 x\right] = 1 \rightarrow$$
$$8senx\cos x \cdot \cos 2x = 1 \rightarrow 4 \cdot sen2x \cdot \cos 2x = 1 \rightarrow 2 \cdot sen4x = 1$$
$$sen4x = \frac{1}{2} \rightarrow 4x = 30º \rightarrow 4x = \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{\pi}{24}$$

2º-) a-) ¿En cuántos ceros acaba 20! (veinte factorial)?
b-) ¿Cuál es el dígito que precede inmediatamente a esos ceros?

Solución:

a) Aplicando el teorema de Lebesgue

$$\left.\begin{cases} 20:2=10 \\ 20:4=5 \\ 20:8=2 \\ 20:16=1 \\ 2^{18} \end{cases}\right\} \rightarrow \left.\begin{cases} 20:3=6 \\ 20:9=2 \\ 3^{8} \end{cases}\right\} \left.\begin{matrix} 20:5=4 \\ 5^4 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 20:7=2 \\ 7^2 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 20:11=1 \\ 11^1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 20:13=1 \\ 13^1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 20:17=1 \\ 17^1 \end{matrix}\right\}$$

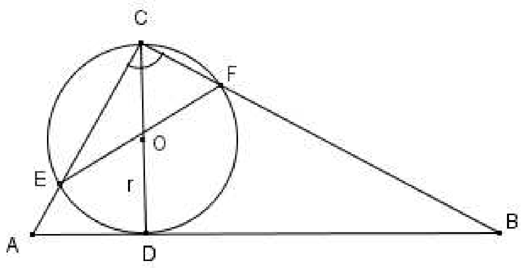
$$\left.\begin{cases} 20:19=1 \\ 19^{1} \end{cases}\right\} \rightarrow 20! = 2^{18}\cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19 = 10^4\cdot 2^{14}\cdot 3^8\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$$

Acaba en 4 ceros.

b) 2^{14} acaba en 4 $\rightarrow$ 3^8 acaba en 1 $\rightarrow$ 7^2 acaba en 9 $\rightarrow$ 11 acaba en 1 $\rightarrow$ 13 en 3 $\rightarrow$ 17 en 7 y 19 en 9 $\rightarrow$ multiplicando estos números: 4·1·9·1·3·7·9 $\rightarrow$
vemos que acaba en 4.

3-) La altura CD a la hipotenusa AB de un triángulo rectángulo ABC es un diámetro de un circulo O. Este círculo corta a AC en E y a BC en F. Si AC=9 y BC=12 , calcular EF.

Solución:



$\left.\begin{matrix} AC=9 \\ BC=12 \end{matrix}\right\}$ Hallamos la hipotenusa AB

AB= $\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15$

Área del triangulo ACB

$$A=\frac{AC\cdot CB}{2}=\frac{AB\cdot h}{2}\Rightarrow \frac{9\cdot 12}{2}=\frac{15\cdot h}{2}\rightarrow h=\frac{36}{5}=2r$$

ECF es un triángulo rectángulo inscrito en un círculo, luego EF = diámetro = 2r = $\frac{36}{5}$