MATEMÁTICAS Y LITERATURA 3
“LOS CRÍMENES DE OXFORD”

1. Unos cuantos nombres

En el libro aparecen los nombres de varios matemáticos:

- Kurt Gödel
- Euclides
- Alan Turing
- Goro Shimura
- Ludwig Wittgenstein
- Andrew Wiles
- Ernst Eduard Kummer
- Pitágoras
- Yutaka Taniyama
- Ernst Zermelo
- Alfred Tarski
- Pierre Fermat
- Leonardo de Pisa (Fibonacci)
- Nicolas de Cusa
- Diofanto

A) En esta lista se nos ha colado un nombre que no aparece en la novela. ¿Quién es? Escribe una breve biografía sobre él, haciendo hincapié en sus aportaciones al conocimiento matemático.

B) Ordena cronológicamente la lista anterior con las fechas de nacimiento (en algún caso aproximada) y muerte (si es el caso).

2. Una de sucesiones

En el libro aparecen, en diferentes momentos, varias sucesiones.

A) Escribe los primeros términos de las tres más representativas.

B) Propón dos posibles continuaciones diferentes para cada una de las sucesiones del apartado anterior, explicando el criterio que utilizas.

C) Teniendo en cuenta el *principio estético a priori* que se explica en la página 77, averigua los términos siguientes y el término general de las siguientes sucesiones:

1, 4, 9, 16, ... 2, 5, 8, 11, ...

15, qe, 12, de, 58, co, 23, _ _, ... 2, 6, 12, 20, ...

D) En la Universidad de Michigan hay un grupo de investigadores sobre la creatividad humana llamado FARG (en siglas inglesas). Uno de los programas de ordenador, llamado *Copycat*, resuelve problemas sobre analogías como el siguiente:

abc cambia a abd. Hacer *lo mismo* con ijk

La mayoría de la gente responde ijl. ¿Por qué crees tú que será así? Otras respuestas han sido ijd, ijk, abd. ¿Con qué criterios podemos proponer estas respuestas?

Resuelve la siguiente variante, dando más de una respuesta posible:

abc cambia a abd. Hacer *lo mismo* con kji.

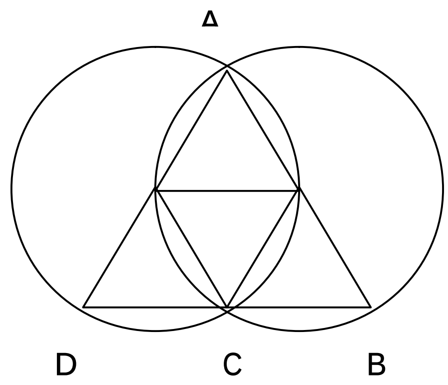
3. Círculo, pez, triángulo, tetraktys, ...

Esta misteriosa sucesión aparece intermitentemente a lo largo de las páginas del libro. Vamos a estudiarla con un enfoque matemático

A) Tomemos el primero de los términos: el círculo. En la página 155 se habla de un método para obtener la longitud de la circunferencia a partir de polígonos regulares inscritos, cada vez con mayor número de lados. Suponiendo que el diámetro de la circunferencia es 1, calcular el perímetro de un polígono regular de n lados, inscrito en ella. Cuando n sea muy grande, ¿hacía qué valor se va acercando el perímetro?

B) Haz lo mismo con polígonos circunscritos a la circunferencia.

C) Nos vamos a fijar en el segundo término de la sucesión: el pez o *vesica piscis*. Se puede construir como la parte común a dos círculos del mismo radio, de forma que la circunferencia de cada uno pasa por el centro del otro.



Suponiendo que los radios de los círculos valen 1, demuestra que los triángulos de la figura son todos equiláteros, calcula la distancia AC y el área del triángulo ABD. ¿Cuál es el área de la *vesica piscis*?

D) El tercer término de la sucesión es el triángulo equilátero. Esta figura geométrica es muy familiar, y de ellas conocemos muchas cosas. Para que repases o profundices en ella, te vamos a plantear las siguientes cuestiones:

- Calcula el área de un triángulo equilátero conociendo la longitud del lado.

- Calcula la longitud del lado de un triángulo equilátero conociendo el valor de su superficie.

- ¿Puede haber un triángulo equilátero en el que su lado y su área sean números enteros? Demuéstralo.

E) Llegamos al cuarto término: la tetraktys, que es la suma de los cuatro primeros números naturales: 1 + 2 + 3 + 4 = 10. También puede considerarse como el cuarto número triangular, pues éstos forman la sucesión 1, 3, 6, 10,.... Busca la expresión general de los números triangulares. ¿Por qué se llaman así?

F)Demuestra que un número cuadrado perfecto se puede descomponer como suma de dos números triangulares consecutivos.

4. Ternas pitagóricas

En el libro también se habla de las ternas pitagóricas; son números enteros positivos x, y, z, que cumplen la igualdad $x^2+y^2=z^2$

A) Encuentra varias ternas pitagóricas.

B) Demuestra que si a, b y c son una terna pitagórica, entonces n.a, n.b, n.c, siendo n un número entero positivo, también lo son.

C) Comprobar que las ternas de números de la forma $2n+1$, $2n^2+2n$, $2n^2+2n+1$, siendo n un número entero positivo, forman una terna pitagórica para cualquier valor de n.

D) Hacer lo mismo con la terna a^2-b^2, $2ab$, a^2+b^2, siendo a y b enteros positivos, con a mayor que b.

E) Encontrar otras ternas pitagóricas.

F) Fermat demostró que el área de un triángulo pitagórico (es decir, cuyos lados forman una terna pitagórica) no puede ser un número cuadrado perfecto. Lo consiguió utilizando un método de demostración del que él fue su creador y que se denomina *del descenso infinito*. ¿En qué consiste este método? ¿Cómo se aplica en este caso?

5. Fermat y su Conjetura

Un personaje del libro comenta en la página 143 que la Conjetura de Fermat o el Último Teorema de Fermat “no es más que una generalización del problema de las ternas pitagóricas…”

A) Escribe el enunciado de la Conjetura de Fermat. ¿Dónde apareció por primera vez? Comenta su relación con las ternas pitagóricas.

B) Escribe, de forma resumida, la biografía de Pierre de Fermat, también llamado “el príncipe de los aficionados”. ¿Por qué se le llama así?

C) Partiendo de la idea de que el área de un triángulo pitagórico no puede ser un número cuadrado perfecto, Fermat demostró que su conjetura era cierta para n=4. ¿Cómo lo hizo?

D) Más tarde demostró que también era cierto cuando n sea un múltiplo de 4. ¿Cómo lo hizo?

E) Demuestra que si el Último Teorema de Fermat es cierto para un exponente n, también lo será para todos los múltiplos de n.

F) Teniendo en cuenta el anterior resultado y como todo número mayor que 2 es divisible por 4 o por un número primo impar, sólo es necesario demostrar su veracidad cuando el exponente sea un número primo impar (porque para n=4 ya lo demostró él). Justifica de alguna forma que el enunciado en negrilla es cierto.

6. La Conjetura a través de la historia

Fermat también afirmó que tenía la demostración para n=3, pero no se conoce.

A) Leonard Euler, un siglo después, publicó la demostración para n=3, pero tenía un fallo... ¿Qué método de demostración utilizó? ¿Cuál es el fallo que contenía?

B) En el siglo XIX, concretamente en 1828 y 1830, dos matemáticos demostraron la validez del teorema para el caso n=5, utilizando el método de Euler mejorado. ¿Quiénes lo consiguieron?

En 1839, Gabriel Lamé demostró el caso n=7 y el 1 de marzo de 1847 Lamé anunció haber encontrado una demostración general de la Conjetura de Fermat, válida para todo exponente n, pero la demostración también tenía un fallo... Esto dio lugar a una lucha frenética entre él y otro matemático por ser el primero en tenerla. Casi quince días más tarde, el 17 de marzo de 1847, Lamé y el otro matemático presentaron en la Academia de Ciencias de París sendas demostraciones...

C) Averigua el nombre del otro matemático y lo que pasó con estas pruebas del teorema. Cuenta el desarrollo y el desenlace de este episodio histórico.

7. Y la historia sigue...

El 17 de mayo de 1847 Joseph Liouville leyó una carta en la Academia de Ciencias de París, por la que iban a cambiar muchas cosas en la historia de los intentos de demostración de la Conjetura de Fermat.

A) ¿Quién había escrito esa carta? ¿Qué decía en ella?

B) Ese mismo año, el autor de la carta, demostró la veracidad de la conjetura para bastantes números, muchos más que hasta entonces... ¿Qué demostró concretamente?

C) La Academia de Ciencias de París, en 1854, creó un premio de 300.000 francos para quien resolviera el problema. En 1858, la Academia concedió, a nuestro personaje misterioso, un premio, pero no el de los 300.000 francos. ¿Qué fue lo que le dieron?

D) Reúne los principales datos de la biografía de este matemático.

8. Llegamos al siglo XX

A lo largo del siglo XX, y sobre todo con la aparición de los ordenadores, se fue estableciendo la veracidad del Último Teorema de Fermat para valores más grandes del exponente n:

- En 1923 se formuló una conjetura que dice que la ecuación de Fermat, para n mayor o igual que 3 posee, a lo sumo, un número finito de soluciones enteras. Esta conjetura se demostró en 1983.

- En 1970 se demostró su certeza para n primo menor que 30.000.

- En 1980 para n primo menor que 125.000.

A) ¿Quiénes son los autores de estas demostraciones?

Así mismo, en 1955, un matemático planteó un problema sobre funciones elípticas que, junto con las generalizaciones añadidas por otros dos matemáticos, se denominó la Conjetura de ...

B) Averigua el nombre de estas tres personas y el enunciado de la conjetura.

9. Y acabamos otra vez en el libro...

Después de este paseo a través de la historia de las matemáticas, llegamos a los días de la acción de la novela y leemos:

"El miércoles 23 de junio me desperté cerca del mediodía..." (pág 184)

"Allí estaba el breve mensaje que se propagaba como una contraseña a todos los matemáticos a lo largo y ancho del mundo: ¡Wiles lo había conseguido! No había detalles sobre la exposición final, sólo se decía que la demostración había logrado convencer a los especialistas y que una vez escrita podría llegar a las 200 páginas."(pág 185)

Este acontecimiento había comenzado dos días antes en un Seminario en el Instituto Isaac Newton de Cambridge.

A) ¿En qué año se produjo esta noticia y quién es su protagonista?

B) La realidad nos dice que, algo menos de dos años más tarde, la comunidad matemática dio su beneplácito oficial a la validez de la prueba. ¿Cuándo ocurrió esto? ¿Cómo se publicaron de forma impresa los resultados?

C) Recopila todas las informaciones que puedas sobre el proceso de trabajo, los años dedicados al tema, las impresiones personales del protagonista, etc, y exponlas aquí.

10. Bibliografía

- Davis, P. y Hersh, R. (1989) *“Experiencia matemática”.* Ed. Mec-Labor, Barcelona.

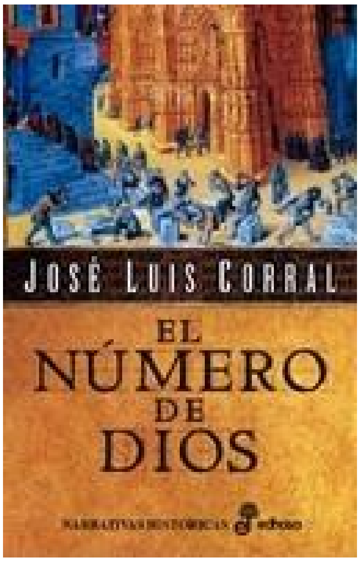
- Haken, H., Hofstadter, D. R. y otros (1990) *“Sobre la imaginación científica. Qué es, cómo nace, cómo triunfa una idea”.* Ed. Tusquets, Barcelona.

- Investigación y Ciencia (1995) *“Grandes matemáticos. Temas 1”.* Ed. Prensa Científica, S. A., Barcelona.

- Stewart, I. (1998) *“De aquí al infinito. Las matemáticas de hoy”* Ed. Grijalbo Mondadori, Barcelona.

MATEMÁTICAS Y LITERATURA 1

“EL NÚMERO DE DIOS”



1. Para empezar... algunos nombres

En esta novela aparecen algunos nombres de matemáticos o de personas relacionadas con las matemáticas:

- Pitágoras - Ptolomeo - Alperagio - Abenragel

Repasando los nombres anteriores, vemos que falta uno; es italiano y vivió entre los siglos XII y XIII. ¿Quién es? Expón aquí sus principales aportaciones a las matemáticas.

2. El arco ojival

El arco ojival es una de las características fundamentales del estilo gótico:

“la nueva arquitectura introdujo el arco ojival de dos centros, de forma apuntada, y el arbotante.” (pág. 33)

A) Dibuja dos circunferencias tales que el centro de una de cada una de ellas sea un punto por el que pasa la otra. La zona común a las dos se llama *vesica piscis* y contiene el arco ojival. Compruébalo en el dibujo.

B) Construye con regla y compás un triángulo equilátero sabiendo la longitud del lado. Comprueba que así también se puede obtener un arco ojival.

C) ¿Por qué crees que se dice en el libro “el arco ojival de dos centros”? ¿Cuáles son los dos centros? ¿Qué otro famoso arco es de un solo centro?

D) A veces, los arcos ojivales van superpuestos unos sobre otros, adornados con circunferencias tangentes. Construye uno con regla y compás, para ello puedes suponer que conocemos la longitud del lado del triángulo equilátero principal (mayor), y averigua después los demás datos esenciales en función del conocido: centros de las circunferencias, radios de las circunferencias, lados de los demás triángulos equiláteros, etc.

3. Las proporciones matemáticas

A lo largo del libro se mencionan las proporciones en multitud de ocasiones:

“Todas las medidas, todas las proporciones [de la catedral] están regidas por el número de Dios.” (pág. 104)

“ Ese es el secreto de esta catedral: está construida siguiendo las proporciones del número áureo, el que Dios eligió para construir el universo...” (pág. 134).

“ La belleza ... está en la proporción.” (pág 207)

“Hemos conseguido que en la nueva catedral se refleje la proporción matemática del número de Dios, lo que significa copiar la proporción numérica con la que Dios, el gran arquitecto, construyó el universo.”

“Las proporciones que ese número representa son las mismas que rigen el orden del mundo...” (pág. 208).

“Y el número de Dios era la proporción perfecta que había sido revelada al hombre ...” (pág 365).

A) En todas estas citas se habla de proporciones matemáticas. ¿Qué es una proporción? Pon ejemplos de proporciones en las que intervengan cuatro números y otras en las que intervengan tres, siendo uno de ellos medio proporcional.

B) También se habla del número de Dios, del número áureo... ¿Cuál es, según el libro, ese número? Escribe su valor en forma de fracción y en forma decimal.

El número de oro lo podemos encontrar desde el conocimiento matemático, viendo su origen, las proporciones que lo originan... :

C) Partiendo de un rectángulo áureo, encontrar el número de oro y explicar el proceso desarrollado para su obtención.

D) Hacer lo mismo que en la pregunta anterior, pero partiendo de un segmento que se desea dividir en dos partes a y b, de forma que se cumpla proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$$

Una vez que conocemos el número de oro, surge una cuestión de forma natural:

E) Compara el número de oro obtenido matemáticamente con el número de Dios de la novela. ¿Qué ocurre? ¿A qué puede deberse?

4. Manejando el número de oro

El número de oro, que se denota habitualmente por la letra griega f es un número de los llamados irracionales.

A) ¿Qué significa ser un número irracional?

B) Demuestra los siguientes resultados que verifica:

$f+1=\frac{1}{f}$; $\frac{1}{f}+\frac{1}{f^2}=1$; $f^2-f-1=0$; $f+f^2=f.f^2$

C) Investiga la relación que hay entre el número de oro y la sucesión que lleva el nombre del matemático italiano que has estudiado en la primera pregunta del cuestionario.

D) Demuestra que la sucesión de números $1, f, f^2, f^3, f^4,...$ es una progresión geométrica en la que cada término, a partir del tercero, es igual a la suma de los dos anteriores, es decir, que $f^n+f^{n+1}=f^{n+2}$ siendo n un número natural cualquiera.

E) Demuestra que si una sucesión de números es una progresión geométrica y cada término (a partir del tercero) es suma de los dos anteriores, entonces es de la forma $a, af, af^2, af^3, af^4,...$ siendo a el primer término de la sucesión.

F) Demuestra que en un pentágono regular, el cociente entre las longitudes de una diagonal y un lado es igual a f.

5. Medidas tradicionales

En varios momentos, los personajes hablan de distintas medidas y sus correspondientes unidades:

"Para la construcción de la nave mayor y sus dos laterales desde el crucero hasta la que sería portada principal, emplearía como medida el pie de París, una medida que equivalía a exactamente a la longitud de su palmo de la mano, con los dedos totalmente extendidos, más la anchura de cuatro dedos." (pág. 307).

"Seguiré aplicando el pie de París para las medidas pequeñas, pero para las proporciones totales usaré el codo de Chartres, dos palmos míos más cuatro dedos. Es la medida que utilizó mi padre en la catedral de mi ciudad: viente codos de anchura, cincuenta de altura, cien de longitud, y la longitud del crucero una quinta parte de la longitud de la nave central.." (pág 308).

"La medida principal de longitud era el pie, pero el pie de París no era el mismo que el de Chartres o que el de Castilla."

A) Expresa, en unidades de medida tradicionales, las dimensiones de las catedrales de Burgos y de León. ¿Dónde aparece el número de Dios?

B) Recopila unidades de medida tradicionales de longitud, superficie y volumen, usadas en la península ibérica en la Edad Media.

C) ¿Cómo se medían en esa época los ángulos? Aprovecha esta ocasión para explicar el error que hay en la construcción de la catedral de Burgos.

6. Los rosetones...

En las catedrales góticas sobresalen por, su belleza, los rosetones de las distintas fachadas. Esto también podemos observarlo en el libro:

" Enrique quiso destacar el gran rosetón de la fachada sur, de ahí que lo convirtiera en un elemento casi exento, rodeado tan sólo por sillares carentes de cualquier decoración. A finales de 1235 ordenó que se comenzaran a esculpir las piezas de la trama de piedra del rosetón del Sarmental..." (pág 257)

A) Escribe el proceso de construcción del rosetón hasta su colocación en la fachada.

B) Observa el rosetón de la puerta del Sarmental y averigua cuántos ejes de simetría tiene. En general, un rosetón de n *lados, pétalos o sectores,* ¿cuántos ejes de simetría tiene?

C) Las figuras geométricas con regularidades suelen tener ejes de simetría. Busca los ejes de simetría de un cuadrado y los de un triángulo equilátero.

D) Busca los planos de la planta de algunos edificios históricos y encuentra sus ejes de simetría.

7. Entremos en el laberinto

Algunas catedrales poseen lo que se denomina un laberinto. Este elemento también aparece en el libro:

" Se trata de una línea trazada en piedra azul y blanca que da vueltas y más vueltas sobre sí misma." (pág 268)

" La gente lo llama *el laberinto*, pero no es eso. Se trata del camino hacia la luz." (pág 268)

" Todas las grandes iglesias de Francia tienen un *laberinto*, que en realidad no es tal, sino una representación del camino de la vida." (pág 399)

A) Averigua las medidas del laberinto de la catedral de Chartres y dibújalo. Haz lo mismo con otros laberintos de catedrales o de jardines.

B) ¿Cuál es el laberinto más famoso de la Grecia Clásica? Explica el mito en el que aparece.

C) ¿Qué se quiere simbolizar con la colocación de un laberinto? Relaciónalo con el conocimiento matemático o la resolución de problemas de matemáticas.

D) Haz una clasificación de los distintos tipos de laberintos.

E) ¿Hay algún método útil para tratar de encontrar la salida de un laberinto? Explica alguno.

8. El octógono maravilloso

Admira el cimborrio de la catedral de Burgos y averigua:

A) El área del octógono principal (suponemos que es regular).

B) El área de la estrellas de ocho puntas.

Los datos reales que necesites debes buscarlos por tu cuenta.

9. Otros números escondidos

“ A partir del cuadrado, del triángulo equilátero y de la proporción áurea, el número de Dios, construir un edificio se convertía en un ejercicio matemático basado en los números, en la geometría y en la simbología divina.” (pág. 365)

“ La lectura de ese tratado le hizo reflexionar sobre la perfección de las figuras geométricas y la presunta irracionalidad y contradicción de que las medidas más perfectas, como el círculo, la diagonal de un cuadrado o la extensión infinita de la proporción áurea, eran precisamente las más fáciles de dibujar.” (pág. 368).

Como puedes ver, en las figuras geométricas elementales podemos descubrir números irracionales con mucho significado y simbolismo; por ejemplo, como hemos hecho en otra actividad, el número de oro en un rectángulo particular.

A continuación, te vamos a proponer varias figuras y números para que encuentres el proceso mediante el cual se relacionan:

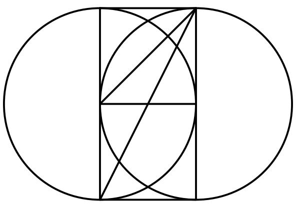
A) La circunferencia y el número p .

B) El cuadrado y $\sqrt{2}$.

C) El triángulo equilátero y $\sqrt{3}$.

D) ¿Qué rectángulo sencillo nos puede dar $\sqrt{5}$? ¿Cómo se hace?

E) En la figura siguiente (las circunferencias son de radio 1 y el centro de cada una es un punto de la otra) aparecen casi todos los números anteriores p , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ como longitudes de determinados segmentos o arcos. ¿Qué longitudes son? Averigua el número que falta y señala en el dibujo su línea correspondiente.



10. La catedral y los teoremas

"Esta catedral es un teorema, sólo un teorema que ha sido elegantemente resuelto: geometría y matemáticas, nada más."(pág. 485)

La palabra teorema tiene un significado muy importante en el conocimiento matemático. Tanto es así que algunos llevan el nombre de la persona que lo enunció o lo demostró por primera vez.

A) Explica lo que es un teorema matemático.

B) Enuncia y demuestra algún teorema que conozcas.

11. Los planos y los dibujos de la realidad

Los constructores de catedrales tenían que usar representaciones manejables de lo que querían construir: dibujos, maquetas o cualquier otra estrategia.

"... desplegó un enorme pergamino en el que había dibujado la planta de la futura catedral..." (pág 104)

"... les presentaba un dibujo en el que con unas rayas se expresaba la forma de la planta en un tamaño cuyas medidas estaban proporcionalmente reducidas." (pág 104)

A) ¿Qué significa la expresión *proporcionalmente reducidas*?

B) La relación de semejanza entre un dibujo y la realidad que representa puede venir dada por un número. ¿Cómo se llama ese número?.

C) Averigua la escala de los dibujos de las plantas de las catedrales de Burgos y León, que están al principio del libro.

D) Con la escala calculada anteriormente, averigua las dimensiones aproximadas del claustro de la catedral de Burgos.

12. Bibliografía

- Domínguez Muro, M. J. (1999) *"El número de oro". Ed. Proyecto Sur. Granada.*

- Ghyka, M. C. (1968) *"El número de oro" Vol I y II.* Ed. Poseidón, Barcelona.

- Ghyka, M. C. (1983) *"Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*". Ed. Poseidón, Barcelona.

- Investigación y Ciencia (1995) *"Grandes matemáticos. Temas 1".* Ed. Prensa Científica, S. A., Barcelona.

- Lawlor, R. (1996) *"Geometría sagrada". Ed. Debate, Madrid.*

Constantino de la Fuente Martínez

Sociedad Castellana y Leonesa de
Educación Matemática “Miguel de Guzmán”
IES “Cardenal López de Mendoza”, Burgos