CONGRESO DEL CENTENARIO DE LA REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

ALGUNOS PROBLEMAS DE IDEA MÁS O MENOS FELIZ

FRANCISCO BELLOT ROSADO

franciscobellot@gmail.com

Ávila, 5 de febrero de 2011

- Agradecimientos

- Agradezco a la Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán” la invitación para compartir con todos vosotros esta Jornada (en paralelo con el Centenario de la R.S.M.E.) dedicada al Profesorado de Educación Secundaria, y a la Universidad de Salamanca, coorganizadora de la Jornada.

Introducción

- Quisiera comenzar esta exposición citando a uno de los mejores expositores de problemas que he conocido a lo largo de mi carrera: el británico Anthony Gardiner, de la Universidad de Birmingham, al que veremos en la diapositiva siguiente. En un artículo publicado en 1992 en la revista *Mathematical Competitions,* titulado *Creating Elementary problems to cultivate mathematical thinking,* enumeraba lo que para él son las características de un buen problema:

Gardiner, a la derecha, recibiendo en Sevilla el Premio Erdös de la WFNMC (1996), de manos de Paul Reiter, presidente del Comité de Premios

- 1) ***Los ingredientes deben ser sencillos y familiares, pero el problema no debe ser de tipo standard.***
- ***2) ningún método de solución debe ser inmediatamente obvio, pero un estudio cuidadoso de la información que se da debe sugerir una o dos prometedoras vías de abordarlo.***
- ***3) una fase exploratoria debe revelar cómo (o si) esas vías deben ser explotadas.***

- *4) la solución final, cuando surja, debe, retrospectivamente, tener una elegancia o sencillez conceptual inesperada.*
- *Personalmente estoy de acuerdo con estas características de un buen problema, tanto para competiciones como para el desarrollo de una clase normal. Y espero haber elegido, dentro de las limitaciones de tiempo que tenemos, algunos ejemplos que hagan patente estas características.*

Ejemplo 1: ***un problema de Lev Kurdlyanchuk***

- Este primer ejemplo se lo debo a los colegas de Ávila y de la Olimpiada de 2º y 4º de la E.S.O. desde mayo del año pasado, cuando lo propuse sin solución en la inauguración de la Fase Regional de la Olimpiada. Saldaré la deuda ahora.
- *Aunque por el enunciado parece un problema de divisibilidad, en realidad la solución, como veremos, es algebraica.*
- *El autor del problema es Profesor de la Universidad de San Petersburgo.*

- ***Se consideran los números enteros a,b,c,d y el número natural n. Se sabe que:***
  - ***n divide a la suma*** $a+b+c+d$
  - ***n divide a la suma*** $a^2+b^2+c^2+d^2$
- ***Entonces, demostrar que n divide al número***
  - $a^4+b^4+c^4+d^4+4abcd$

- El hecho de que en el enunciado aparezcan algunas de las funciones simétricas de los cuatro números *a, b, c, d* “conduce” a considerar el polinomio cuyas raíces son precisamente *a,b,c,d:*
  - $P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$
- *Desarrollándolo según las potencias de x e imponiendo las condiciones (obvias)*
  - $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0,$
- *se obtiene, sumando y reordenando los términos, el resultado deseado.*

Ejemplo 2: un problema de Samuel Greitzer

- Samuel L. Greitzer, nacido en Odessa, emigró a U.S.A. en 1906 y es el autor de dos libros de amplia difusión en el mundillo de las Olimpiadas: *Geometry revisited,* del que es coautor H.S.M. Coxeter; e *International Mathematical Olympiads 1959 – 1977.*
- *En la siguiente diapositiva podemos ver su foto.*

GREITZER

- Se considera la ecuación
  - $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 30 = 0$
- Sean sus raíces p, q, r, s; todas ellas reales. Se sabe que
  - $(p/2) + (q/5) + (r/6) + (s/8) = 2.$
- Hallar las raíces y calcular los coeficientes de la ecuación.

- *Parecen demasiadas incógnitas (7), y pocas condiciones entre ellas (2). Pero si pensamos en las relaciones de Cardano – Vieta, hay una relación más, oculta en el enunciado: el producto pqrs = 30.*
- *La desigualdad de las medias aritmética y geométrica viene en nuestra ayuda:*

- Como $(p/2) + (q/5) + (r/6) + (s/8) = 2$, la media aritmética de esas cuatro fracciones es ½.
- Calculemos su media geométrica:
  - $(pqrs/480)^{1/4} = (30/480)^{1/4} = ½$
- Entonces las cuatro fracciones deben ser iguales:
  - $(p/2) = (q/5) = (r/6) = (s/8) = ½$
- y encontrar las raíces ya es sencillo:
  - $p = 1, q = 5/2, r = 3, s = 4$
- y el polinomio es $x^4 - (21/2)x^3 + 39x^2 - (119/2)x + 30$

Ejemplo 3:*un problema de la Olimpiada británica de 1987*

- *El problema está incluido en el excelente libro de Tony Gardiner “The Mathematical Olympiad Handbook” (An introduction to problem solving), publicado por Oxford U.P. en 1997. Es uno de los pocos libros de problemas de Olimpiadas donde las soluciones no aparecen caídas del cielo, sino que su génesis está siempre explicada, siguiendo, en buena medida, el camino que uno intentaría para tratar de resolver un problema que no conoce. Y además, dejando los detalles al cuidado del lector. No se puede leer sin papel y lápiz.*

- *Si x, y, z son números reales positivos, hallar razonadamente el máximo valor de la expresión*

$$\frac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)}$$

- Cada uno de los tres factores del numerador aparece en dos factores separados en el denominador. Entonces, si se intenta hacer la expresión mayor aumentando en el numerador por ejemplo la x, el denominador aumenta como x^2, asi que de hecho cuando x tiende a infinito la fracción tiende a 0. Por otra parte, si se intenta aumentar la fracción disminuyendo el denominador, no es suficiente disminuir *una* de las variables, porque por ejemplo x,y están juntas en el mismo paréntesis, hay que disminuir dos de las variables al mismo tiempo (por ejemplo, x e y) y entonces el numerador contiene al producto xy, así que la fracción se hace muy pequeña. Por lo tanto parece que los valores de las variables para los que se alcance el máximo no deben ser ni muy grandes ni muy pequeños.

- Una de las cosas más desagradables de la expresión dada es que no parece simplificarse fácilmente.
- **¿Y si le diéramos la vuelta a la fracción?**
- En ese caso **deberíamos buscar el mínimo valor de esta fracción:**

$$\frac{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)}{xyz}$$

- Naturalmente, ahora no parece muy bueno ponerse a multiplicar alocadamente; pero sí separar los tres factores del denominador y asociarlos a los tres últimos factores del nuevo numerador, para que queden los cuatro en la forma (1 + algo)

$$(1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)\left(1+\frac{16}{z}\right)$$

- Convendría también que la expresión fuera más simétrica, y eso se consigue con un pequeño cambio de variable:
- x=p, (y/x)=q, (z/y) = r, (16/z) = s

- así que la expresión es
    - $(1+p)(1+q)(1+r)(1+s)$,
- Y además se observa que
    - $pqrs=16xyz/(xyz) = 16 = 2^4$.
- Tratemos de seguir el consejo de Pólya: *si un problema presenta una situación demasiado complicada, inténtese el mismo problema con una situación más sencilla.*
- Quedémonos sólo con dos factores, suponiendo que $pq = c^2$ (*en el caso general se sabe que el producto pqrs es una cuarta potencia)*. Tenemos
    - $(1 + p)(1 + q) = 1 + p + q + pq = 1 + p + q + c^2$

- y queremos acotar inferiormente esta suma. **La desigualdad de las medias aritmética y geométrica debería surgir de una manera bastante natural para acotar p + q:**
  - $p + q >= 2(pq)^{1/2} = 2c$,
- con lo que se llega a
  - $(1 + p)(1 + q) >= 1 + 2c + c^2 = (1 + c)^2$.
- Vamos a ver lo que sucede con tres factores
  - $(1+p)(1+q)(1+r)$
- suponiendo que $pqr = c^3$.

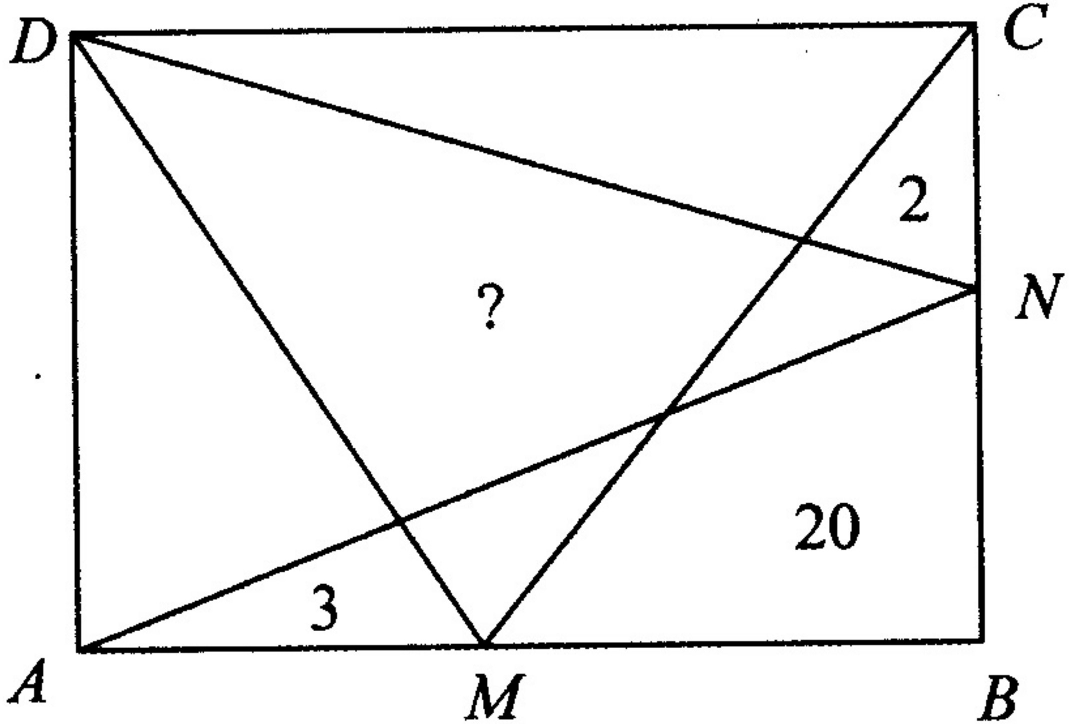
- $(1+p)(1+q)(1+r) = 1 + p + q + r + pq + qr + pr + pqr$,
- y la desigualdad aritmético – geométrica la vamos a aplicar dos veces :
  - $p + q + r >= 3(pqr)^{1/3} = 3c$,
  - $pq + qr + rp >= 3(p^2q^2r^2)^{1/3} = 3c^2$,
- de modo que en definitiva queda
  - $(1+p)(1+q)(1+r) >= 1 + 3c + 3c^2 + c^3 = (1 + c)^3$.
- El siguiente paso ya es el último: (**y además lo damos en la seguridad de que vamos por buen camino)**

- Es claro que ahora c = 2; y se tiene
  - $(1+p)(1+q)(1+r)(1+s)=$
  - $=1+p+q+r+s+pq+pr+ps+qr+qs+rs+pqr+pqs+prs+qrs+pqrs$
- Ahora necesitamos aplicar tres veces la desigualdad aritmético – geométrica:
  - $p+q+r+s >= 4(16)^{1/4} = 4.2$
  - $pq+pr+ps+qr+qs+rs >= 6((p^3q^3r^3s^3)^{1/6}) = 6.4=6.2^2$
  - $pqr+pqs+prs+qrs >= 4((p^3q^3r^3s^3)^{1/4})=4.2^3$
- con lo que resulta
  - $(1+p)(1+q)(1+r)(1+s)>= 1+4.2+6.2^2+4.2^3+2^4 = (1+2)^4 = 81,$

- y volviendo al problema original resulta que el máximo valor buscado es 1/81, que se alcanza para $x=2$, $y=4$, $z=8$.

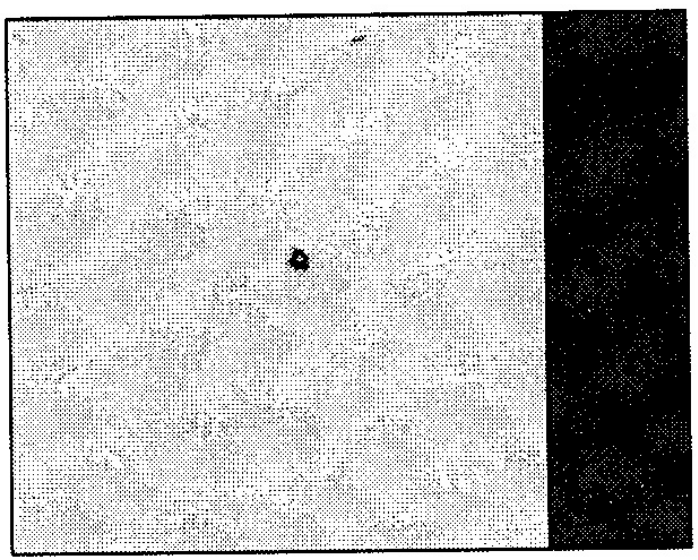
Ejemplo 4: Una aplicación del teorema de las alfombras

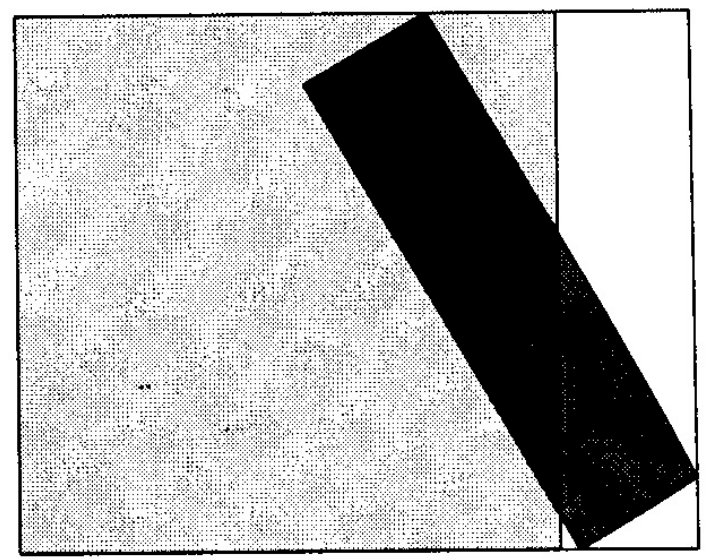
- ***Los puntos M y N se dan en los lados AB y BC, respectivamente, del rectángulo ABCD, y en la figura se muestran las diferentes partes en que queda dividido el rectángulo. Los números indican las áreas de las partes correspondientes. Calcular el área del cuadrilátero marcado con el signo de interrogación.***


D
C
2
N
?
20
3
A
M
B

El teorema de las alfombras

- Si la figura de la izquierda representa dos alfombras cubriendo por completo el suelo de la habitación rectangular, y movemos una de ellas como se indica en la figura de la derecha, es evidente que el área cubierta “dos veces” por las alfombras es igual al área no cubierta “ninguna vez”.
- No importa la forma de las alfombras; lo relevante es que entre las dos sumen el área del polígono que cubren sin superponerse.





- Volviendo al enunciado y a la figura original, es evidente que x (área cubierta dos veces) es igual a 20 + 2+ 3 = 25 (área no cubierta ninguna vez).
- En este caso, las “alfombras” son los triángulos MDC y ADN.

- **¡Muchas gracias por vuestra atención!**