¡QUE VIENEN LOS RUSOS!

Un breve recorrido por algunos problemas de competiciones escolares de Rusia

Francisco Bellot Rosado

franciscobellot@gmail.com

XI Congreso de Educación Matemática de Castilla y León

Burgos, 10 de noviembre de 2012

- El título, deliberadamente elegido siguiendo el consejo de Claudi Alsina, provocador, para llamar la atención, es el de una película de 1965, en la que un submarino ruso encalla en una pequeña aldea de la costa Este de los Estados Unidos.
- Me propongo exponer brevemente algunos problemas de las Olimpiadas y concursos matemáticos rusos, muy numerosos y de todos los niveles de dificultad que uno se pueda imaginar, que espero no sean conocidos por la audiencia. En la actualidad es posible acceder más fácilmente a estos problemas porque hay publicadas varias versiones en inglés de esas competiciones, como veremos a continuación.

Una Selección bibliográfica

- **Shklarski-Chentzov-Yaglom:** ***The URSS Olimpiad problem book, 1962, W.H.Freeman.***
- **Shklarski-Chentzov-Yaglom:** ***Selected problems and theorems in Elementary Mathematics (Arithmetic and Algebra), 1976, Mir Publishers, Moscú.***
- **Fomin-Genkin-Itenberg:** ***Mathematical Circles (Russian Experience), American Mathematical Society, 1996*** (Hay versión española de 2012, de la RSME)
- **Vavilov y otros:** ***Olimpíadas matemáticas rusas (problemas selectos), Red Olímpica, Buenos Aires 1995***
- **Slinko:** ***USSR Mathematical Olympiads 1989-1992, AMT 1997***

- **Fomin-Kirichenko:** ***Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991, Math Pro Press 1994***
- **Shifman (Ed.):** ***you failed your math test, Comrade Einstein, World Scientific, 2005***
- **Cherney-Liu:** ***Soviet Union Mathematical Olympiad 1961-1968, Intuitive Mathematics Press, Canada 2003***
- La AMS (American Mathematical Society) ha publicado recientemente dos tomos de la Olimpiada de Moscú y un tercero de los Círculos Matemáticos de Moscú (este último de Sergei Dorichenko).

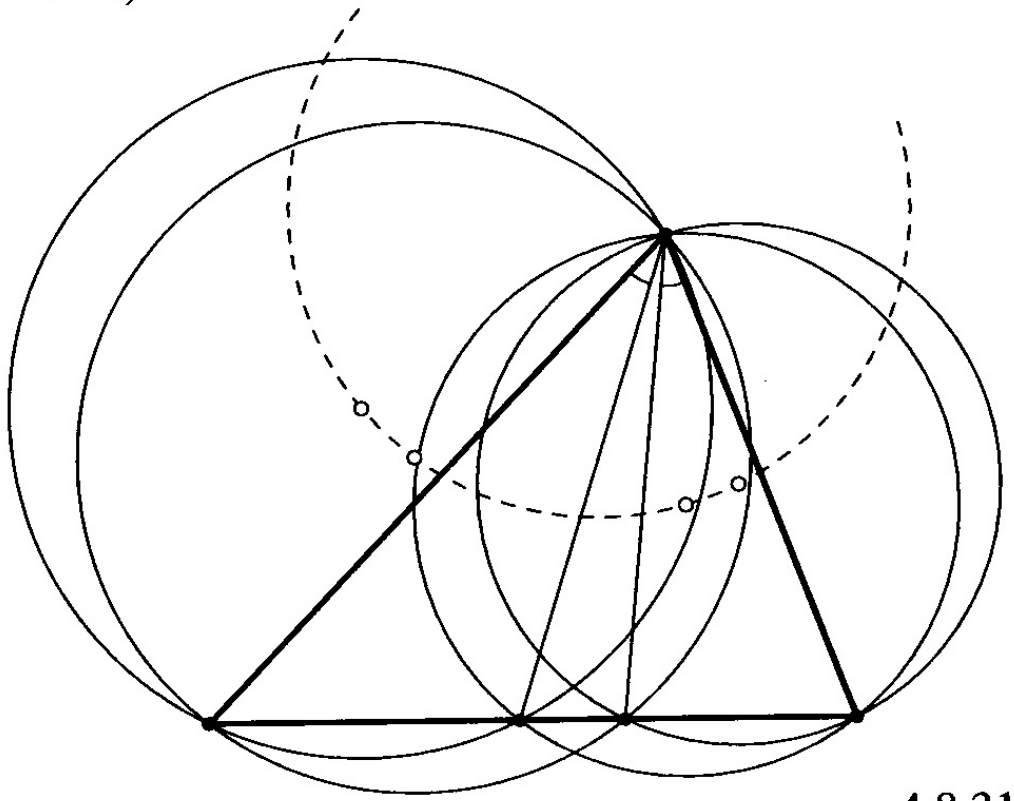
CUATRO CIRCUNCENTROS EN UNA CIRCUNFERENCIA

Un problema de T. Emelyanova, de la Olimpiada rusa de 2011, Fase de Repúblicas, Grado 10, problema 2

- ***En el lado AC del triángulo ABC se toman dos puntos M y K, tales que los ángulos ABM y CBK sean iguales.***
- ***Demostrar que los circuncentros de los cuatro triángulos ABM, ABK, CBM y CBK están en una circunferencia***

La numeración de la figura es la de un curioso libro de Arsenyi Akopyan, *Geometry in Figures,* donde no hay texto de los problemas, sólo la figura. En trazo discontinuo, lo que hay que probar.

4.8.30)



4.8.31)

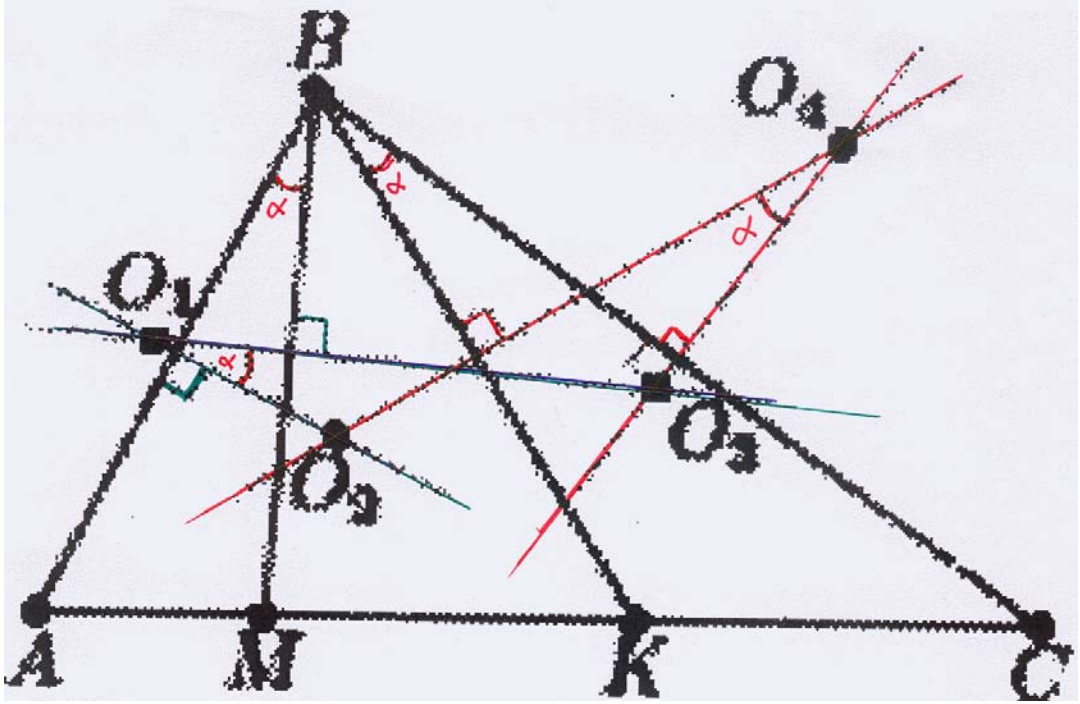
Solución

(Traducida de la página web rusa http://mceem.ru)

Para fijar ideas, supondremos que el punto M está entre A y K.

Sean O_1, O_2, O_3, O_4 los circuncentros respectivos de los triángulos ABM, ABK, CBM y CBK.

Las rectas O_1O_3 y O_1O_2 son las mediatrices de los segmentos BM y AB, respectivamente. Entonces los ángulos marcados son iguales , porque sus lados están comprendidos entre perpendiculares.

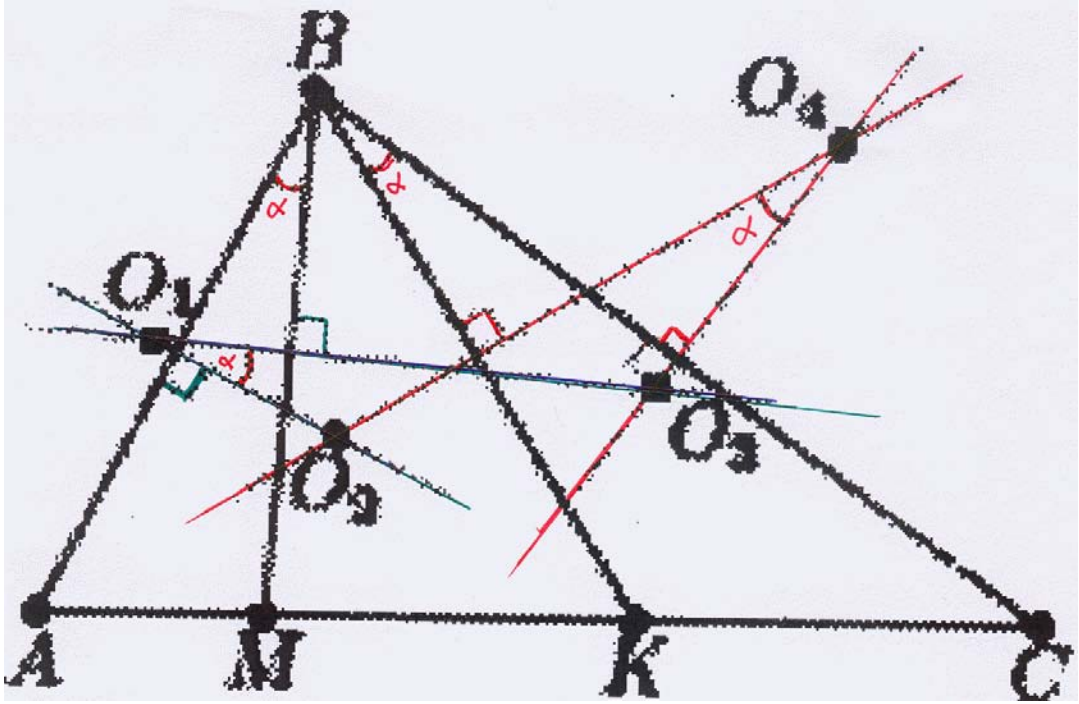


Análogamente se demuestra que los ángulos O_2 O_4 O_3 y CBK son iguales , y ya que BM y BK son isogonales, tenemos la igualdad buscada entre los ángulos desde los que se ve el segmento O_2 O_3, como se pretendía probar.

Como se ve, es esencial que BM y BK sean isogonales del triángulo.

Observación

El punto de intersección de O_1O_2 y O_3O_4 es el circuncentro O del triángulo ABC; los puntos O_2 y O_3 pertenecen respectivamente a los segmentos OO_1 y OO_4.



Problema 2
Olimpiada rusa de 1978 (Clase 9, problema 1)

- Designamos con a_n el número entero más próximo a $\sqrt{n}$. Calcular la suma

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{1980}}$$

Para facilitar el análisis del problema, presento algunos valores aproximados de las raíces de los 20 primeros naturales

- √1= 1.0 √2= 1. 4142 √3= 1. 7321 √4= 2.0 √5= 2. 2361 √6= 2. 4495 √7= 2. 6458 √8= 2. 8284 √9= 3.0 √(10)= 3. 1623 √(11)= 3. 3166 √(12)= 3. 4641 √(13)= 3. 6056 √(14)= 3. 7417 √(15)= 3. 8730 √(16)= 4.0 √(17)= 4. 1231 √(18)= 4. 2426 √(19)= 4. 3589 √(20)= 4. 4721

- De una manera formal, k es el entero más próximo a $\sqrt{n}$ si y solamente si se verifican las desigualdades $k-(1/2)<\sqrt{n}\leq k+(1/2)$
- Esto se puede escribir como $k^2-k<\sqrt{n}\leq k^2+k$.

Se tiene

$$a_1 = a_2=1$$

$$a_3 = a_4=a_5=a_6=2$$

$$a_7 = \cdots=a_{12}=3$$

$$a_{13} = \cdots=a_{20}=4$$

…

- Entonces, puesto que nos piden que calculemos la suma

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{1980}}$$

- la escribimos en la forma

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}\right)+\cdots$$

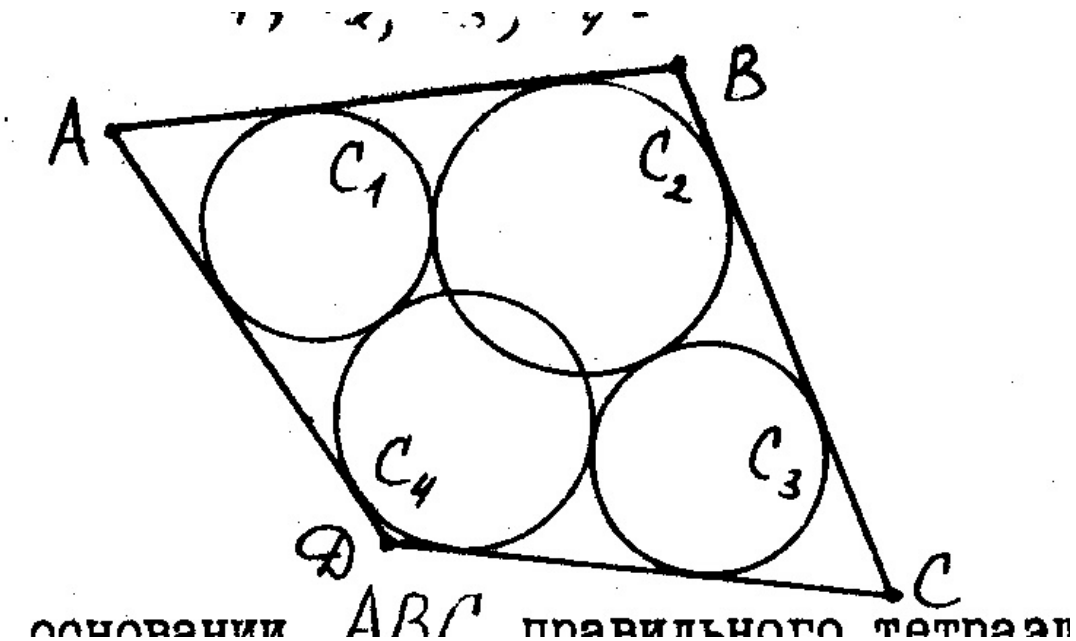
- En el primer paréntesis hay 2·1 sumandos, cada uno de los cuales vale 1; en el segundo hay 2·2 sumandos, cada uno de los cuales vale (1/2); en el tercero, hay 2·3 sumandos, cada uno de los cuales vale (1/3); y así sucesivamente. En general, en cada paréntesis hay 2k sumandos, cada uno de los cuales vale (1/k),con lo que el valor de cada paréntesis es 2.
- El último término de la suma es $(1/(a_{1980}))$. Puesto que se verifica 44·45= 1980, y √(1980)= 44,497, el entero más próximo a √(1980) es 44; como además √(1981)= 44,508 su entero más próximo es 45, con lo que $(1/(a_{1980}))$ es el último sumando del grupo cuyos elementos toman el valor (1/(44)), el primero de los cuales es el de subíndice 44·43+1= 1893, ya que, en efecto, √(1893)= 43,509, cuyo entero más próximo es 44. En conclusión, la suma pedida valdrá 44·2=88.

UN PROBLEMA DE LA OLIMPIADA RUSA DE 1990, FASE DE REPÚBLICAS

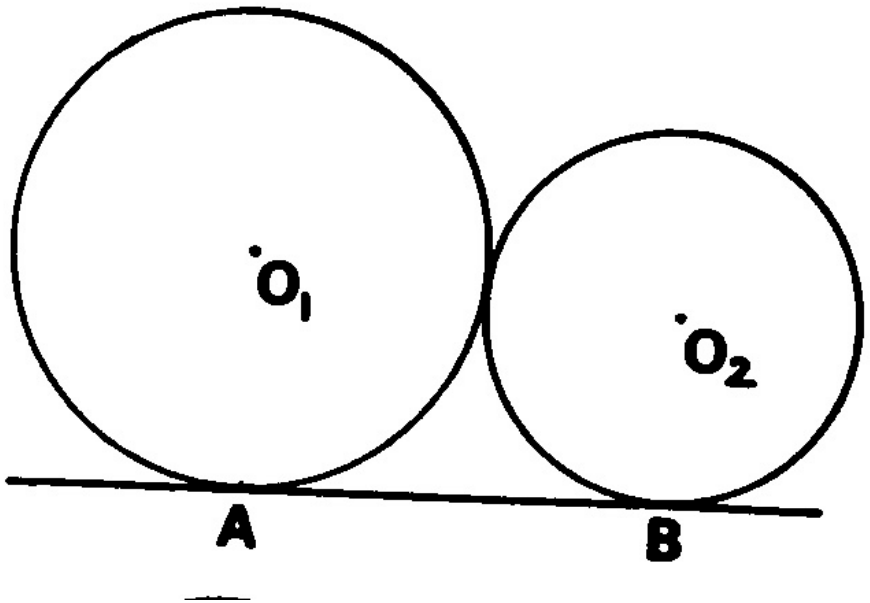
Autor: Igor Voronovich

Las figuras están escaneadas del folleto semimanuscrito de la Olimpiada rusa de aquel año. De ahí que se mezclen fragmentos con letras cirílicas.

En el plano están situados cuatro círculos, de la siguiente manera: C_1 es tangente exteriormente a C_2 y a C_4; C_2 es tangente exteriormente a C_3 ; C_3 es tangente exteriormente a C_4. Los círculos C_1 y C_2 ; C_2 y C_3; C_3 y C_4; C_4 y C_1 tienen tangentes exteriores comunes, las cuales forman un cuadrilátero con un círculo inscrito. Demostrar que dos de los círculos tienen el mismo radio.

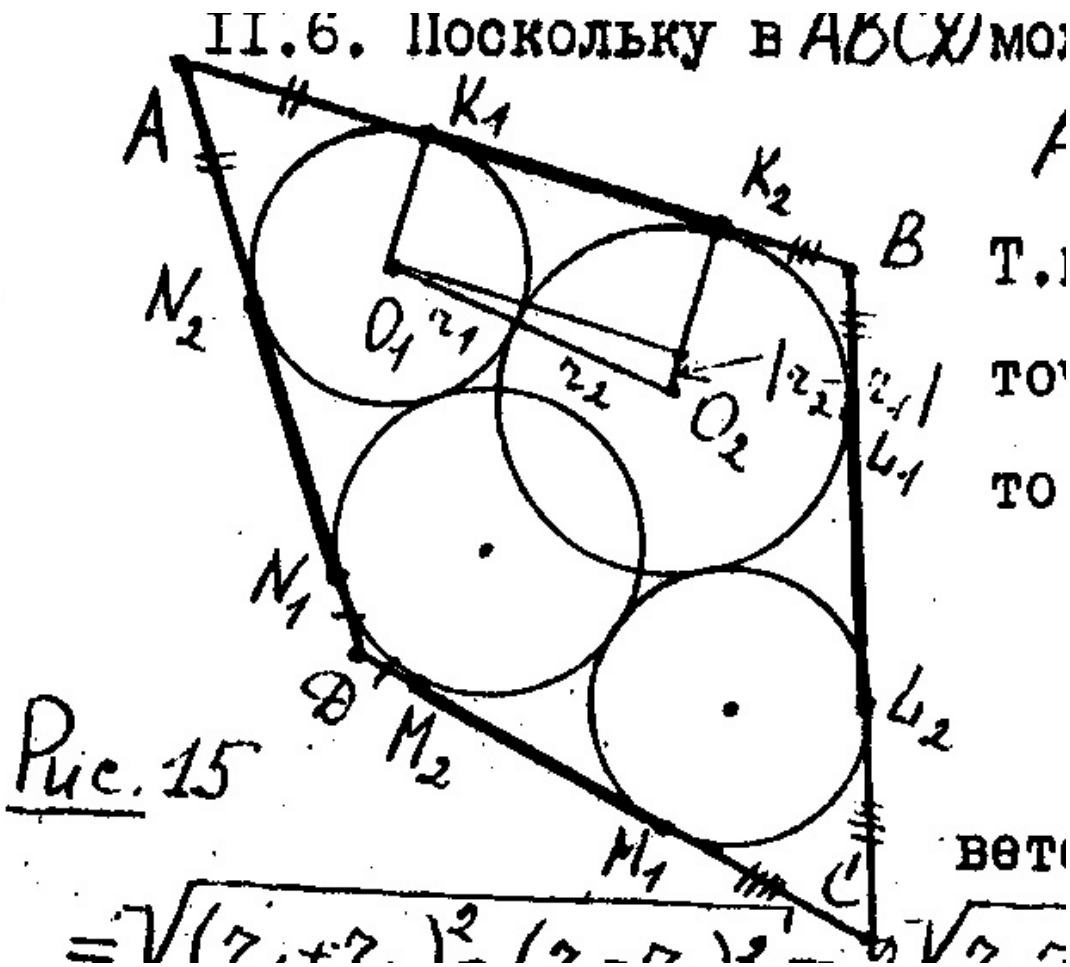


Una observación preliminar, sencilla pero importante: en la situación de la figura siguiente, la distancia AB entre los puntos de tangencia de las circunferencias con la tangente común exterior vale la raiz cuadrada del producto de los radios. Para verlo es suficiente aplicar el teorema de Pitágoras.



- El que, en la primera figura, el cuadrilátero ABCD tenga un círculo inscrito se traduce (teorema de Pithot) en la igualdad
    - AB+CD = BC + DA.
- Por otra parte, los segmentos de tangentes trazadas a una circunferencia desde un punto exterior son iguales en longitud; esto quiere decir,

Se verifican las igualdades $AK_1=AN_2$; $BK_2=BL_1$; $CL_2=CM_1$ y $DM_2 = DN_1$. Éstas, junto con AB+CD = BC + DA, dan como resultado la igualdad $K_1K_2+M_1M_2 = L_1L_2 + N_1N_2$, que a su vez, por la observación inicial, se puede escribir en términos de los radios de las circunferencias C_i, de la siguiente manera



Las dos igualdades equivalentes de más abajo terminan el problema

$$2(\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_3 r_4} - \sqrt{r_2 r_3} - \sqrt{r_4 r_1}) = 0$$

$$\left(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_3}\right)\left(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_4}\right) = 0$$

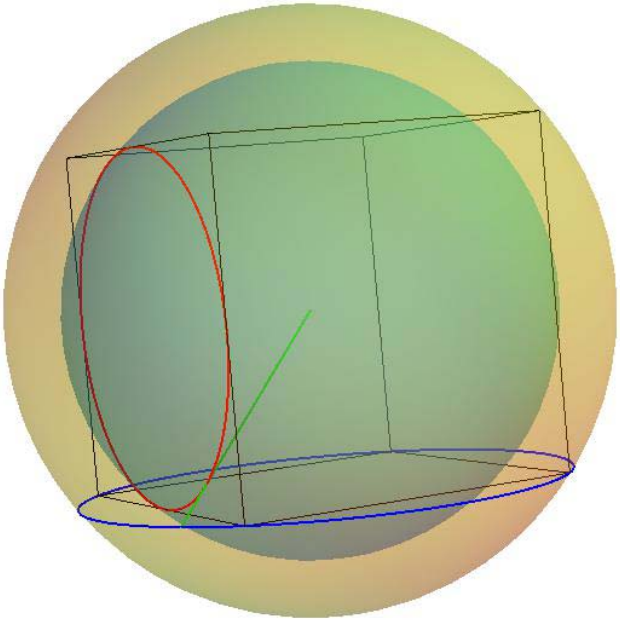
- Si tenemos tiempo podemos ver un problema más, del libro *You failed your mathematical test, Comrade Einstein.*

Problema 4

- **En una cara de un cubo se inscribe una circunferencia.**
- **A una cara contigua se le circunscrribe otra circunferencia.**
- **Calcular la mínima distancia entre los puntos de ambas circunferencias.**

Veamos una figura para comprender bien el problema

Inscrita en rojo, circunscrita en azul

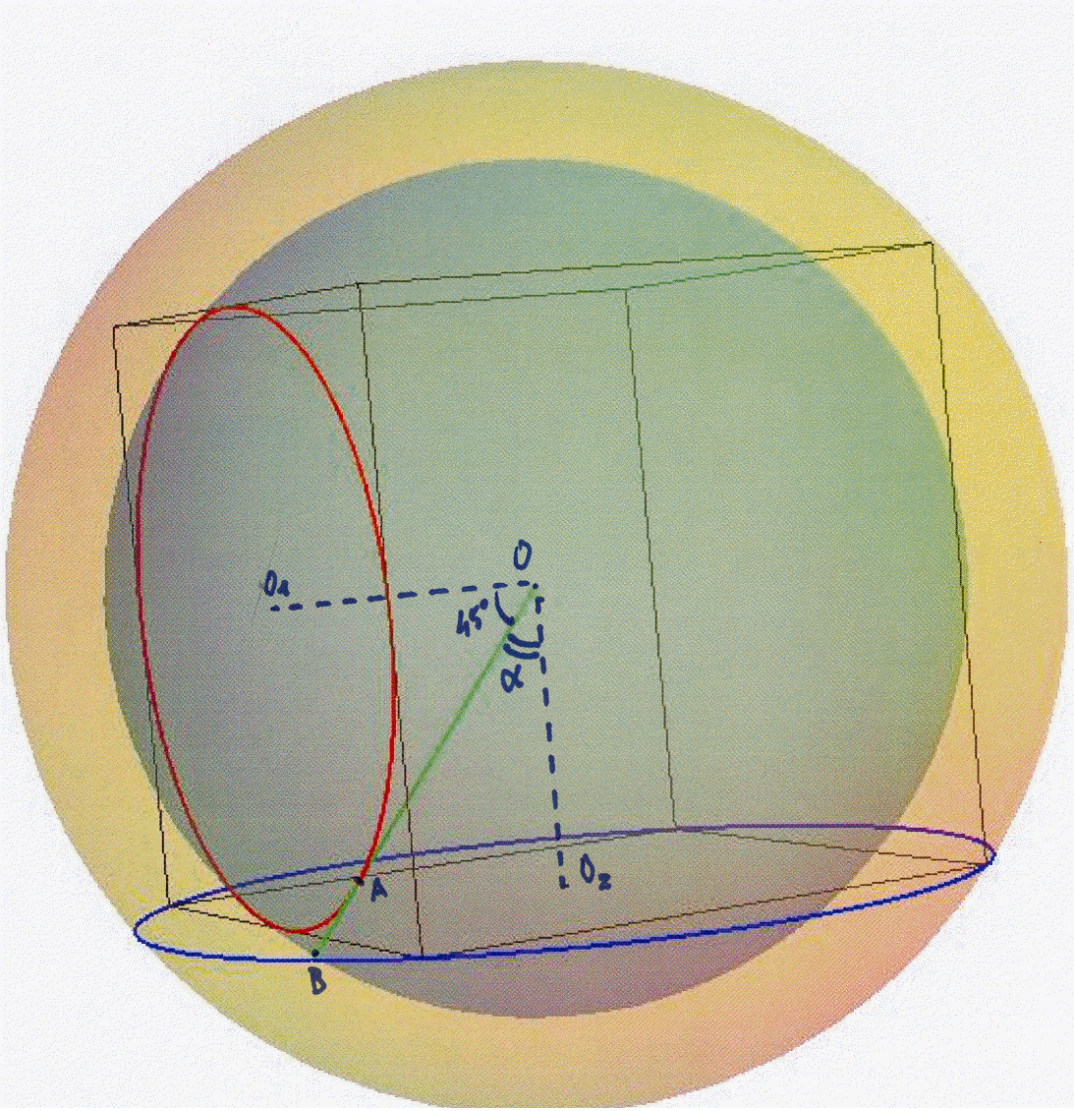


- El problema tiene una solución standard, paramétrizando convenientemente las dos circunferencias en un sistema de coordenadas con origen en el centro del cubo, y hallando luego el valor mínimo de la función de dos variables (los parámetros de los puntos de cada circunferencia) que da la distancia buscada.
- Pero se puede dar una solución más elemental…

Una solución elemental

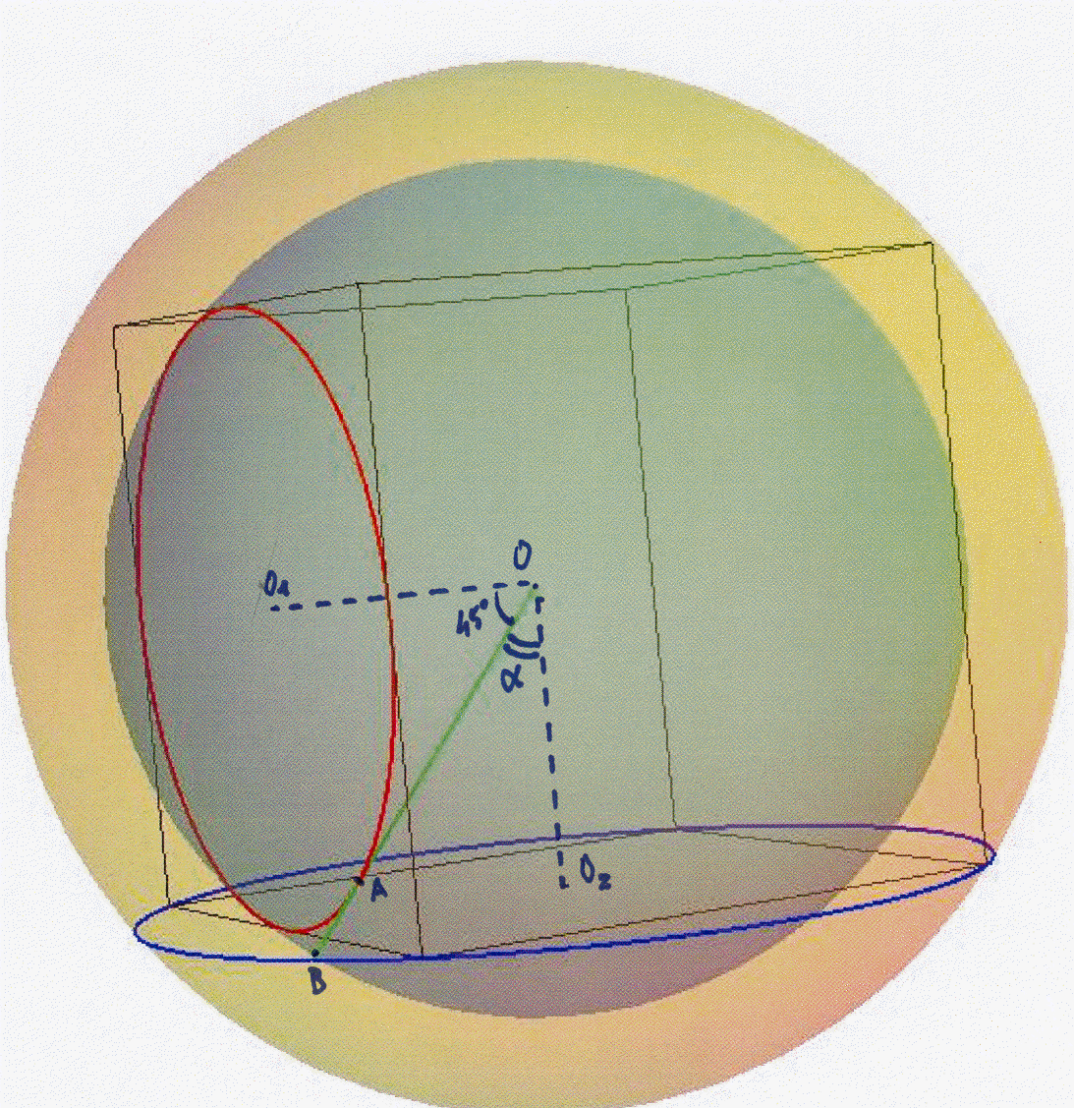
Para fijar ideas, supongamos que la arista del cubo es 2*a* . Entonces, el radio de la circunferencia inscrita en la cara es *a. Y* el radio de la circunferencia circunscrita a la cara contigua será *a* multiplicado por la raíz cuadrada de 2.

Si llamamos O al centro del cubo, vemos en la figura dos esferas concéntricas, la exterior amarilla y la interior verde, cada una de las cuales contiene a las circunferencias respectivas.



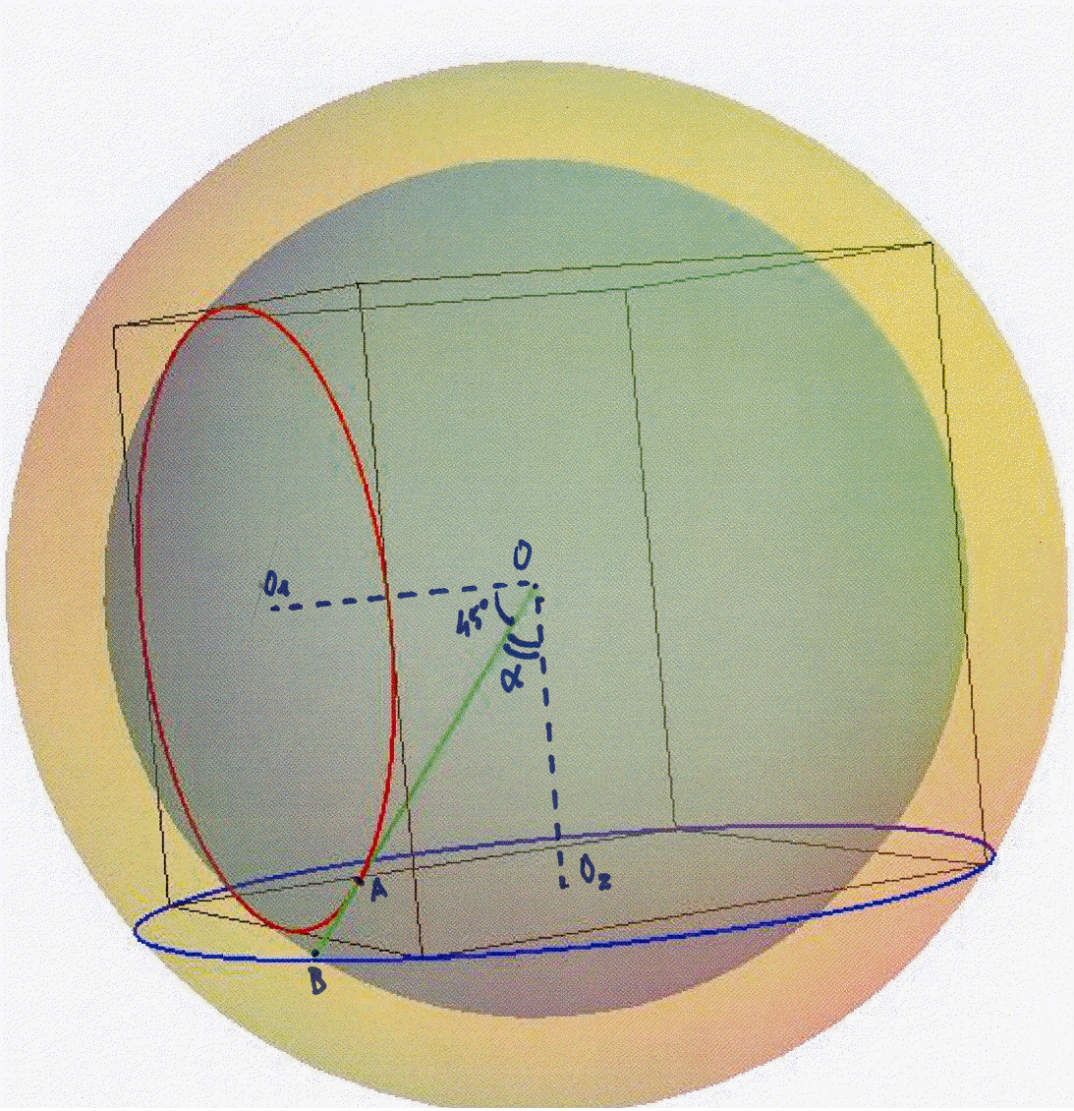
Es claro que la distancia *d* buscada no puede ser <u>menor</u> que la diferencia de los radios de las esferas.

$$d \geq a\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$



En la figura se ve una semirrecta (verde clara), saliendo del centro del cubo y cortando a la circunferencia inscrita en A y a la circunscrita en B.

Si demostramos que tal rayo verde existe, habremos probado que AB da la distancia mínima buscada.



En la figura anterior, tenemos

$$\measuredangle O_1OO_2 = 90^{\circ},\ \measuredangle \mathrm{O}_1OA = 45^{\circ},$$

$$\measuredangle \mathrm{BOO}_2 = \alpha = \arctan\sqrt{2},\ 45^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$$

- Cada uno de eoss ángulos es menor que la suma de los otros dos, y la suma de los tres es menor que 360º. Estas son condiciones necesarias y suficientes para que exista un triedro de vértice O, cuyos ángulos de las caras sean los tres ángulos marcados. Esto significa que los puntos O, A y B están efectivamente alineados (en la arista común a los dos últimos ángulos del trièdro).
- Entonces la distancia AB es igual a

$$a\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

- Y si tomamos otros dos puntos, M y N, en las dos circunferencias, considerando el triángulo OMN, la desigualdad triangular garantiza que la distance MN es msyor que la diferencia OM – ON, que vale, precisamente

$$a\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

- Así terminamos el problema.

- ¡Muchas gracias por vuestra atención!