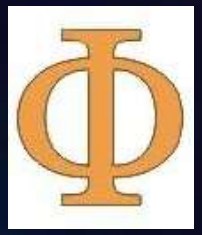
Φ EL NÚMERO DE ORO Φ

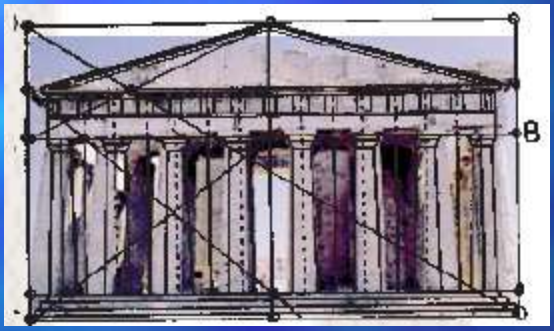
¿QUÉ ES EL NÚMERO DE ORO?



- **NÚMERO MUY ESPECIAL.**
- **APARECE EN LA NATURALEZA, EN EL ARTE Y EN LA VIDA COTIDIANA.**
- **FI:SEXTA LETRA DEL ALFABETO GRIEGO.**
- **PROPORCIÓN ÁUREA O RAZÓN ÁUREA.**
- **LIGADO AL RECTÁNGULO ÁUREO Y A LA SUCESIÓN DE FIBONACCI.**

ALGO DE HISTORIA

- **CONOCIDO DESDE LA GRECIA CLÁSICA (s. V a. C.)**

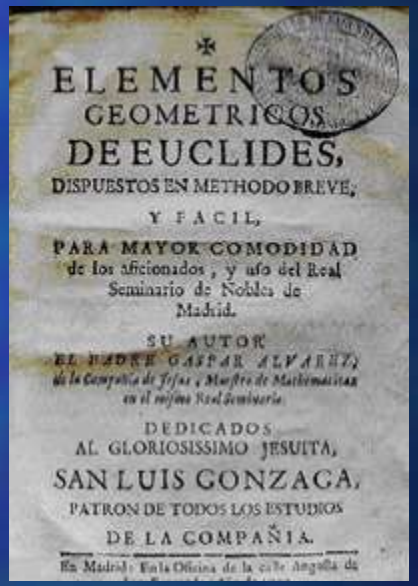


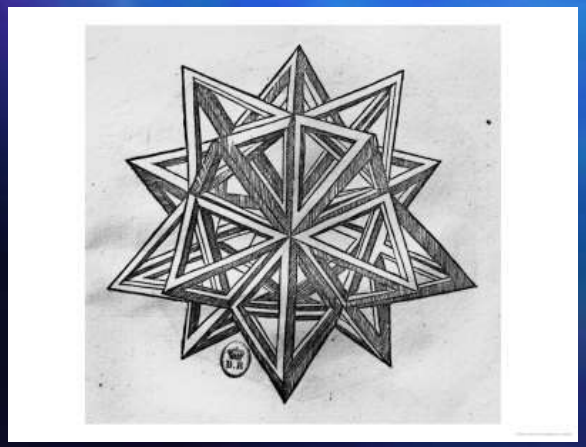
- **EL ESTUDIO DE LAS PROPORCIONES LLEVÓ A SU DESCUBRIMIENTO.**

ALGO DE HISTORIA

APARECE POR PRIMERA VEZ EN "LOS ELEMENTOS" DE EUCLIDES .

"Se dice que una recta está dividida en media y extrema razón cuando la longitud de la línea total es a la parte mayor, como la de esta parte mayor es a la menor."


ELEMENTOS
GEOMETRICOS
DE EUCLIDES,
DISPUESTOS EN METHODO BREVE,
Y FACIL,
PARA MAYOR COMODIDAD
de los aficionados, y uso del Real
Seminario de Nobles de
Madrid.
SU AUTOR
EL PADRE GASPAR ALVAREZ,
de la Compañia de Jesus, Maestro de Mathematicas
en el mismo Real Seminario.
DEDICADOS
AL GLORIOSISSIMO JESUITA,
SAN LUIS GONZAGA,
PATRON DE TODOS LOS ESTUDIOS
DE LA COMPAÑIA.
En Madrid: En la Oficina de la calle Angosta de



LUCA PACIOLI DEDICA EN 1509 TODO UN TRATADO, "DIVINA PROPORCIÓN", AL NÚMERO DE ORO.

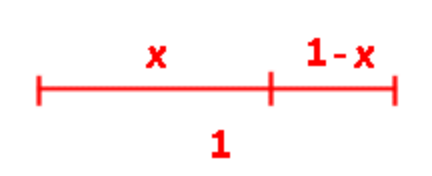
SU VALOR

- **SU VALOR ES 1,61803...**
- **DE OTRA FORMA: Φ=** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- **FI ES UN NÚMERO IRRACIONAL.**

SU IMPORTANCIA ES MÁS GEOMÉTRICA QUE NUMÉRICA

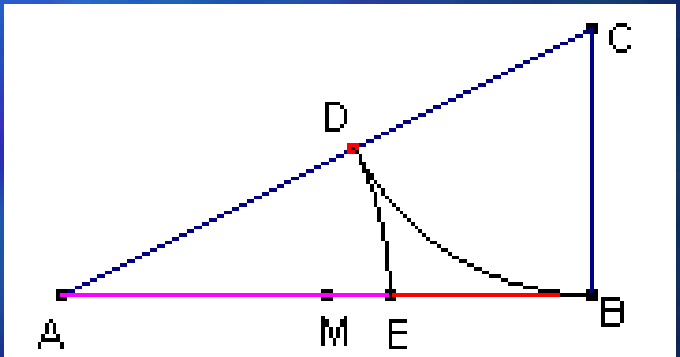
QUÉ MIDE

QUEREMOS DIVIDIR UN SEGMENTO EN SECCIÓN ÁUREA



$$\frac{\text{segmento mayor}}{\text{segmento menor}} = \frac{\text{segmento total}}{\text{segmento mayor}}$$

GEOMÉTRICAMENTE



AB/AE = AE/EB

CURIOSIDADES ÁUREAS

1.- La ecuación $x^2 - x - 1 = 0$ tiene como solución el número de oro.

2.- $\phi^2 - \phi - 1 = 0 \rightarrow \phi^2 = \phi + 1$

Dividiendo la ecuacion entre ϕ:

$$\phi - 1 - \frac{1}{\phi} = 0 \rightarrow \frac{1}{\phi} = \phi - 1$$

3.-

Símbolo	$1/\varphi^3$	$1/\varphi^2$	$1/\varphi$	1	φ	φ^2	φ^3
Valor	0,364	0,382	0,618	1	1,618	2,618	4,236

4.- $\phi^3 = \phi^2 \cdot \phi = (\phi + 1) \cdot \phi = \phi^2 + \phi = \phi + 1 + \phi = 2\phi + 1$

$\phi^4 = \phi^3 \cdot \phi = (2\phi + 1) \cdot \phi = 2\phi^2 + \phi = 2(\phi + 1) + \phi = 3\phi + 2$

$\longrightarrow$ $\phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \ldots \rightarrow \phi, \phi + 1, 2\phi + 1, 3\phi + 2, \ldots$

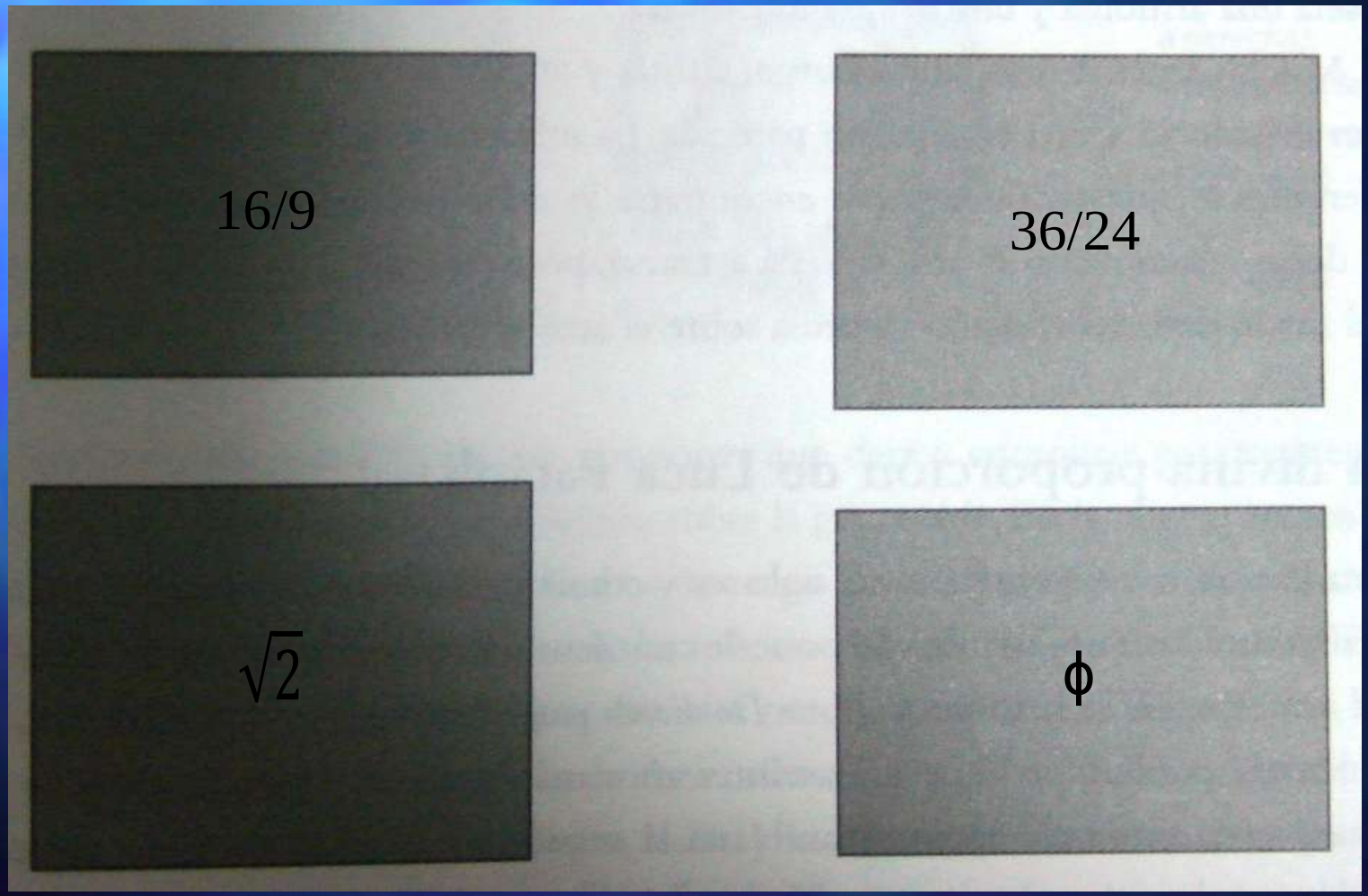
Esta relación es la misma que se verifica en la sucesión de Fibonacci.

OTRAS FORMAS PARA ϕ

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}$$

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

¿QUÉ RECTÁNGULO TE GUSTA MÁS?



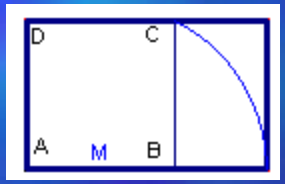
RECTÁNGULO ÁUREO

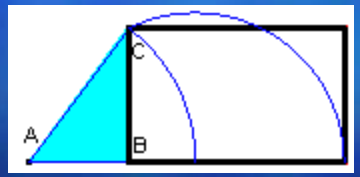
RECTÁNGULO ESPECIALMENTE ARMONIOSO

Se denomina rectángulo áureo o rectángulo de oro al rectángulo en que la base y la altura están en proporción áurea. Si a y b son los lados, a/b = **Φ**

Distintas formas de construir este rectángulo

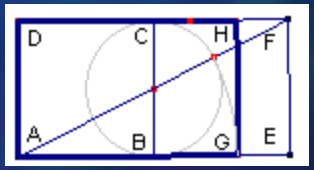
•Partiendo de un cuadrado



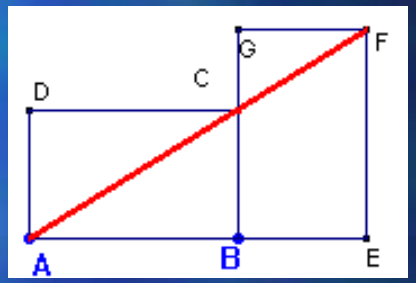


•A partir del triángulo 3-4-5

•A partir de un doble cuadrado



Una forma de reconocer que un rectángulo es áureo:

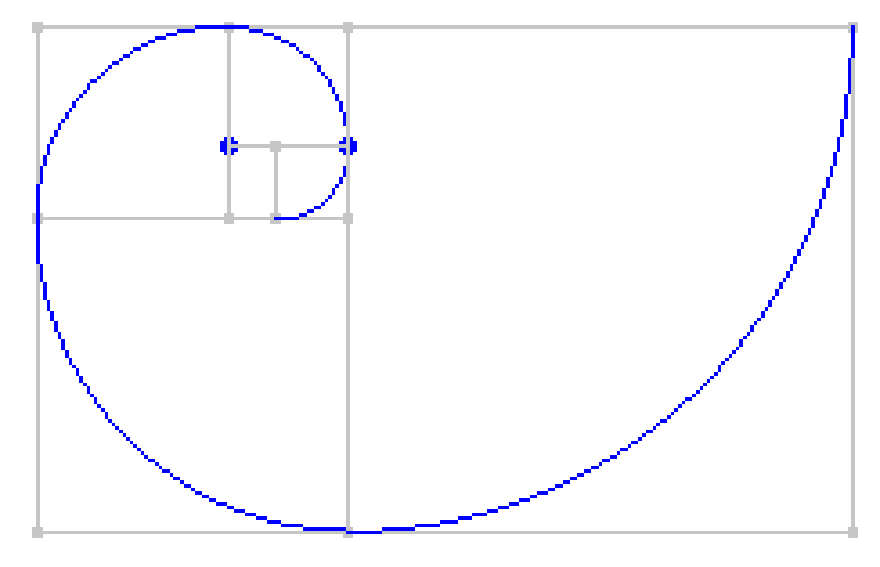


Ejercicio: Si a un rectángulo áureo le quitamos un cuadrado, el rectángulo resultante también es áureo. Y así sucesivamente...

LA ESPIRAL DE ORO

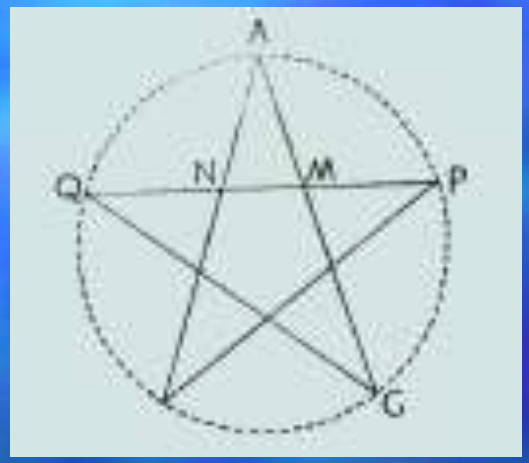
El rectángulo de oro nos permite trazar la espiral áurea o de Durero

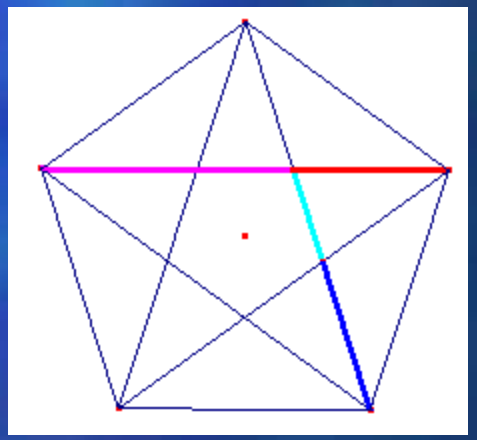
En 1525, Alberto Durero publica Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas. En esta obra muestra cómo trazar con regla y compás algunas espirales y entre ellas una que pasará a la historia con su nombre.



LA ESTRELLA PENTAGONAL

- La estrella pentagonal era el símbolo de los seguidores de Pitágoras.
- Creían que el universo estaba configurado según un orden numérico, sólo con números fraccionarios.

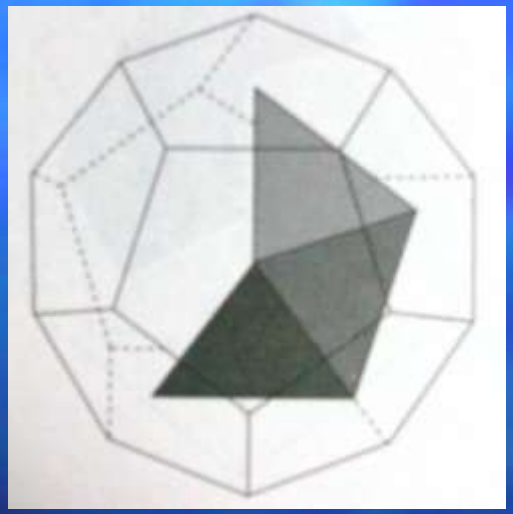




$$\frac{QN}{NM} = \frac{NP}{MP} = \frac{QP}{NP} = \frac{QP}{AP}$$

EL NÚMERO DE ORO Y EL PENTÁGONO

DODECAEDRO E ICOSAEDRO



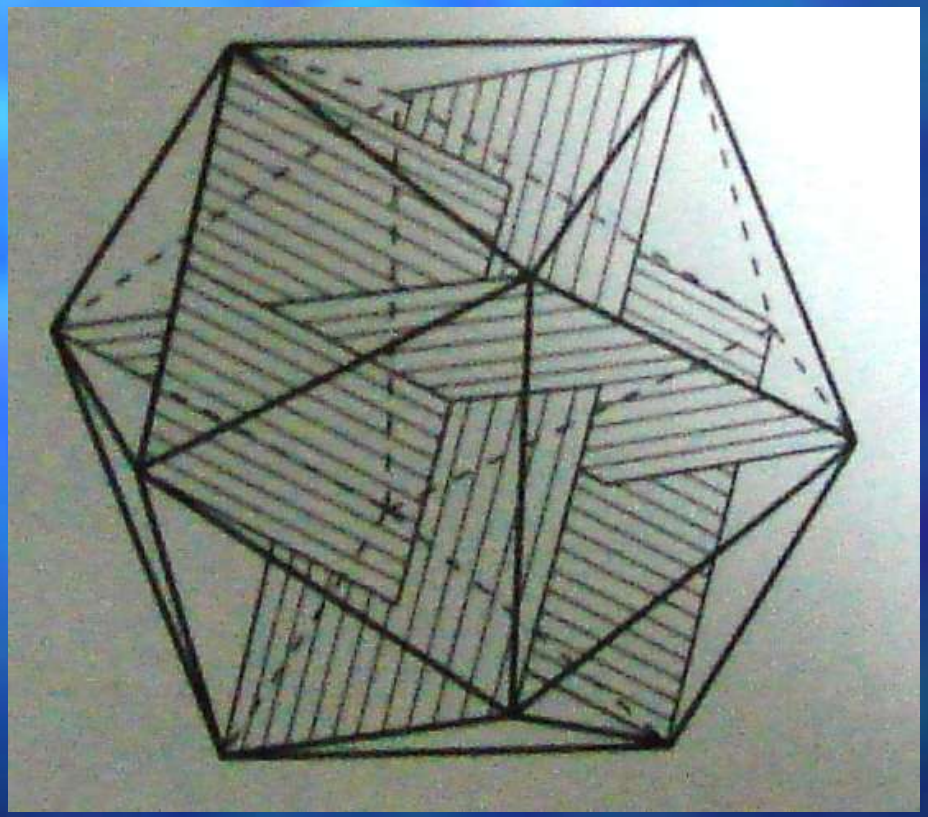
Área dodecaedro=$\frac{15\Phi}{\sqrt{3-\Phi}}$

Volumen dodecaedro=$\frac{5\Phi^2}{6-2\Phi}$

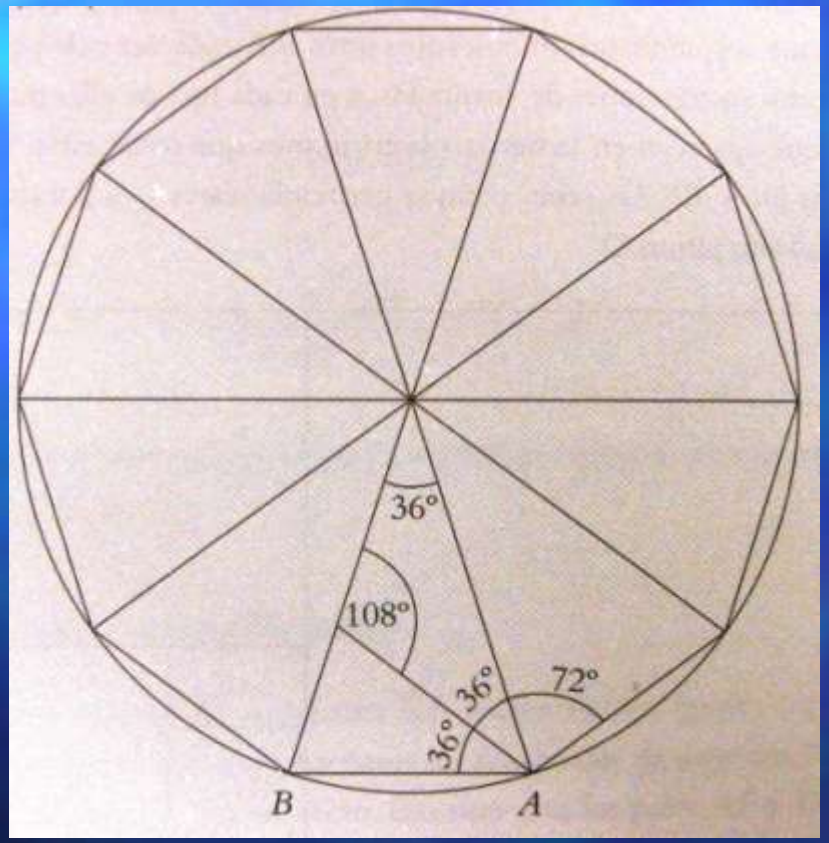
Volumen icosaedro=$\frac{5\Phi^2}{6}$

La relación entre sus aristas es $\frac{\Phi^2}{\sqrt{5}}$

RECTÁNGULOS ÁUREOS EN EL ICOSAEDRO

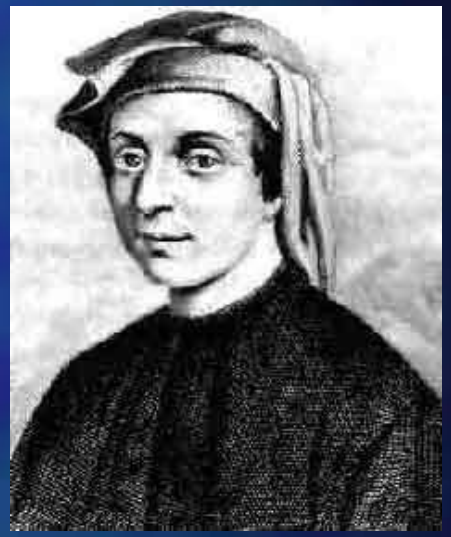


EL DECÁGONO REGULAR



$$\frac{RADIO}{LADO} = \phi$$

EL NÚMERO DE ORO Y SU HERMANA GEMELA: LA SUCESIÓN DE FIBONACCI



•**L**eonardo de Pisa (1170 a 1250), mejor conocido por su apodo Fibonacci.

•**S**e hacía llamar a sí mismo "Bigollo" que quiere decir "bueno para nada".

•Sistema hindo-arábigo superior al romano y al ábaco. Lo introduce en Europa.

•**"Liber Abaci"**, escrito en 1202. Aparecen los criterios de divisibilidad y las pruebas del 9, del 11 y del 7.

•**L**eonardo de Pisa, el matemático más original y hábil de la época medieval, pero buena parte de sus trabajos eran demasiado difíciles para ser bien comprendidos por sus contemporáneos.

Disputas entre abacistas y algoristas.

UN TORNEO MATEMÁTICO

Tercer problema:

Tres hombres se reparten al azar un capital. A continuación el primero aporta a un fondo común la mitad de su porción, el segundo un tercio y el tercero un sexto. Después hacen con el fondo tres partes iguales, y cada cual toma una para sí. ¿Cuánto tuvo cada uno en el primer reparto, si la cantidad final fue, para el primero, la mitad del capital inicial, para el segundo la tercera parte y para el tercero la sexta parte?

Los problemas pasaron a formar parte de una colección de 15, que llamó Flos super solutionibus quarundam quaestionum ad numerum et geometriam. (Flor de soluciones de ciertas cuestiones relativas a los números y a la geometría.)

Algunos problemas propuestos en el Liber Abaci son los siguientes:

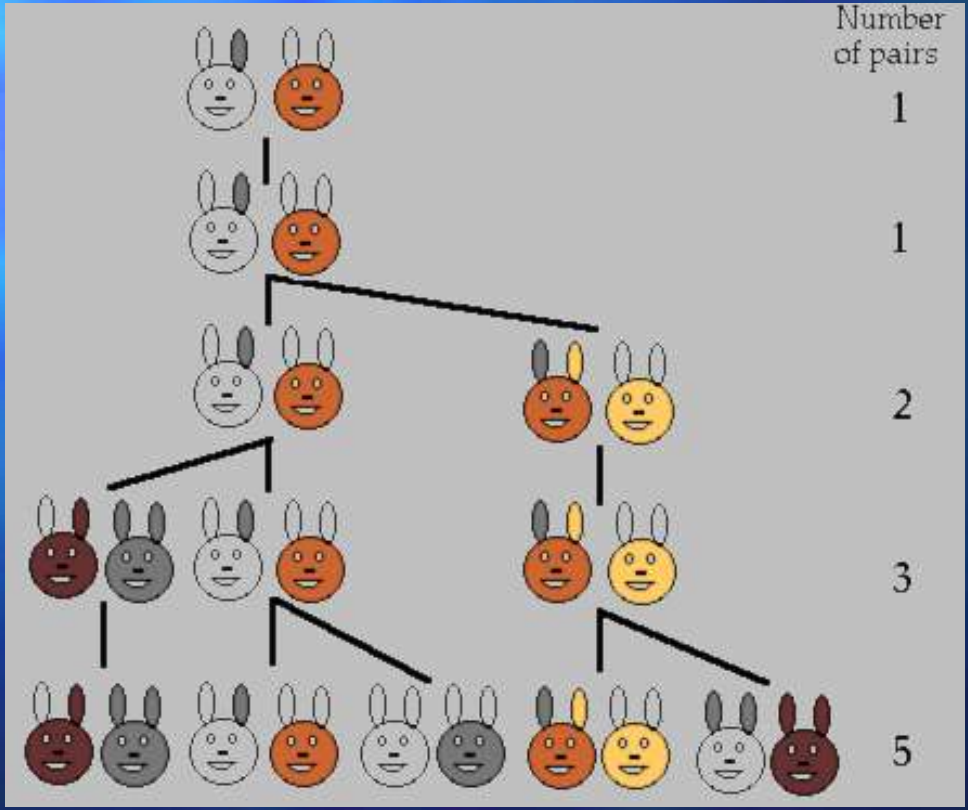
- **1. S**iete mujeres mayores van viajando a Roma y cada una de ellas lleva siete mulas. Cada mula lleva siete sacos y en cada uno de ellos hay siete piezas de pan. En cada pieza de pan hay siete cuchillos y cada uno de ellos tiene siete dientes. ¿Cuántos dientes de cuchillo viajan a Roma?
- **2. U**n hombre entró a una huerta que tenía siete puertas y tomó un cierto número de manzanas. Al abandonar la huerta le dio al primer guardia la mitad de las manzanas que llevaba más una. Al segundo guardia la mitad de las manzanas que le quedaban más una. Hizo lo mismo con los guardias de cada una de las cinco puertas que le faltaban. Cuando se fue de la huerta le quedaba una manzana; ¿cuántas manzanas había tomado en un principio?

SUCESIÓN DE FIBONACCI

En el Liber Abaci propone el problema siguiente:

1) Supongamos que tenemos una pareja de conejos (macho y hembra) de un mes de edad que aún no pueden reproducirse, pero que podrán hacerlo cuando cumplan dos meses de edad.
2) Supongamos también que cada mes, a partir del segundo, nace una nueva pareja de conejos (macho y hembra).
3) Cada pareja de conejos se reproduce de la misma forma que la pareja inicial.

La pregunta del millón es por supuesto, ¿cuántos conejos tenemos al cabo de x meses?



Así la sucesión de Fibonacci es:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025,...

a) La serie empieza con dos unos.
b) Cualquier término de la serie se obtiene de sumar los dos anteriores. Por ejemplo, el noveno término de la serie se construye sumando el séptimo y el octavo.
c) La serie es infinita.

¿Podrías calcular el término número 100 de la sucesión de Fibonacci?

¿QUÉ TIENE ESTO QUE VER CON EL NÚMERO DE ORO?

La más sorprendente de las propiedades de la sucesión de Fibonacci es ésta: Dividamos dos términos consecutivos de la sucesión, siempre el mayor entre el menor y veamos lo que obtenemos.

1 : 1 = 1
2 : 1 = 2
3 : 2 = 1´5
5 : 3 = 1´66666666
8 : 5 = 1´6
13 : 8 = 1´625
21 :13 = 1´6153846....
34 :21 = 1´6190476....
55 :34 = 1´6176471....
89 :55 = 1´6181818....

ESTA PROPIEDAD FUE DESCUBIERTA POR KEPLER

RELACIONES NUMÉRICAS SORPRENDENTES

- Si elegimos 10 términos consecutivos y los sumamos obtenemos un múltiplo de 11.

$$1+1+\ldots+55= 143=11\cdot 13$$

- Esa suma es 11 veces el término que ocupa el 7º lugar de la suma.
- La suma de número cualquiera de términos empezando por el primero es igual al término que ocupa la posición n+2 menos 1.

$$1+\ldots+55=143=144-1$$

MÉTODO PARA ENCONTRAR TERNAS PITAGÓRICAS CON LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

- Elegimos 4 números consecutivos: 2, 3, 5 y 8
- Formamos 3 números:
  - Producto de los extremos: $2 \cdot 8 = 16$
  - El doble del producto de los números centrales: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
  - La suma de los cuadrados de los dos centrales: $3^2 + 5^2 = 34$

$16^2 = 256$

$30^2 = 900$ $\qquad$ $256 + 900 = 1156$

$34^2 = 1156$

RELACIÓN ENTRE LOS TÉRMINOS DE ESTA SUCESIÓN

- Tres términos consecutivos: 3, 5 y 8

$$3 \cdot 8 = 5^2 - 1$$

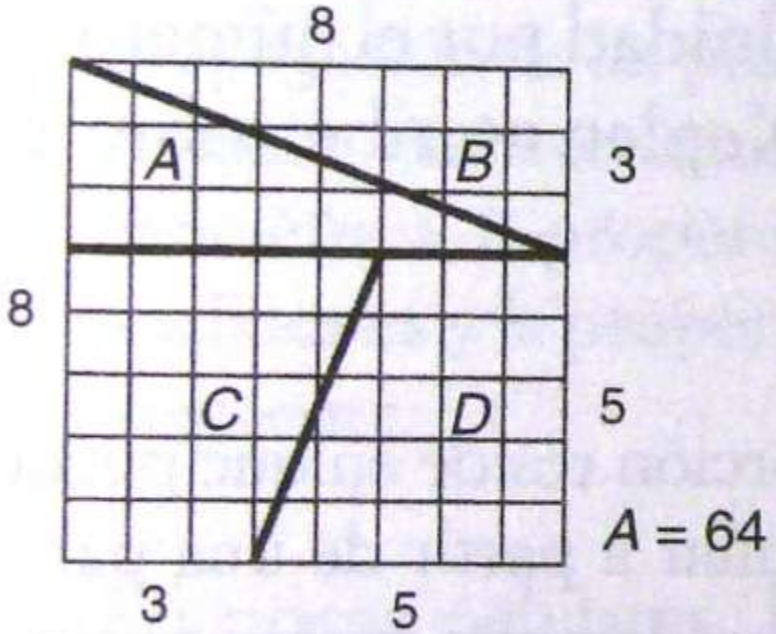
- Otros tres: 5, 8 y 13

$$5 \cdot 13 = 8^2 + 1$$

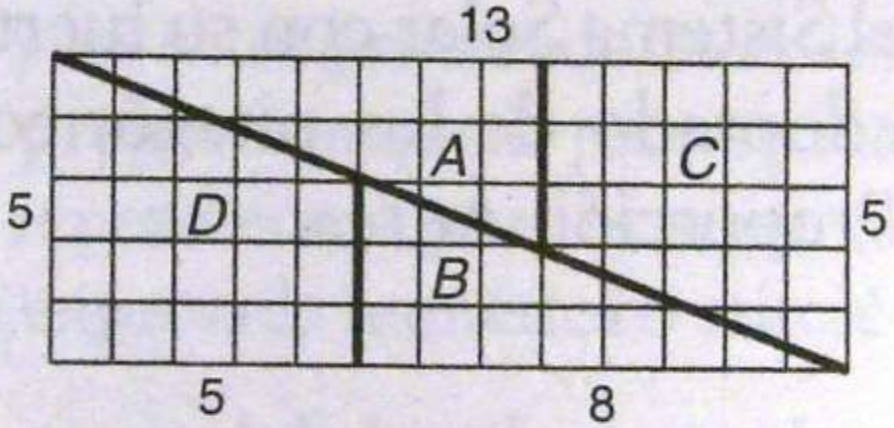
Generalizando: $a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^{n-1}$

UN PUZZLE DESCONCERTANTE

- ESTA PROPIEDAD FUE UTILIZADA POR SAM LOYD, FAMOSO CREADOR DE PUZZLES MATEMÁTICOS



$A = 64$



$A = 65$

EL TÉRMINO GENERAL

- Encontrado por el matemático francés Binet.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

MÁS…

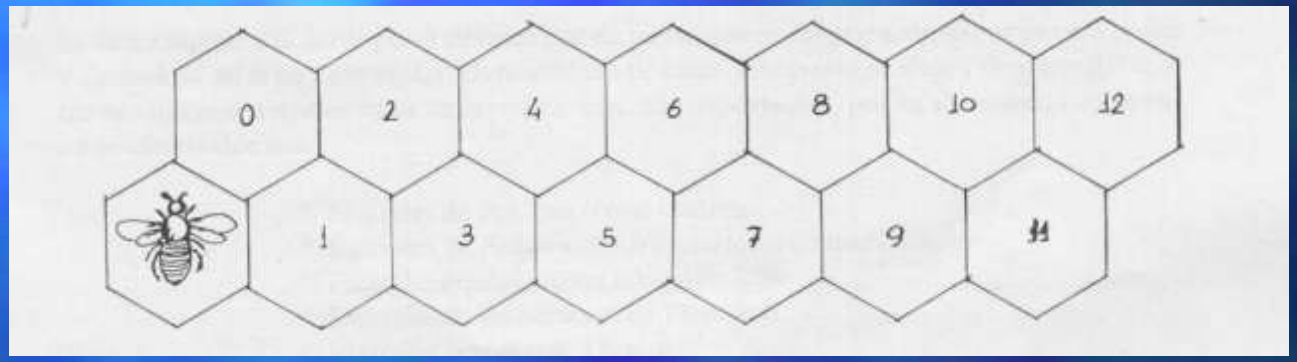
- Relación con el triángulo de Pascal

- Los términos de la sucesión que son primos ocupan lugares primos pero lo contrario no es cierto. ($n=19$, $a_{19}=4181=37\cdot 113$ no lo es)

  Una conjetura: la sucesión de Fibonacci contiene infinitos primos.

EL PASEO DE LA ABEJA

La abeja de la figura no puede volar y va andando de una celda a otra contigua, siempre que el número de la última sea mayor que el de la anterior.

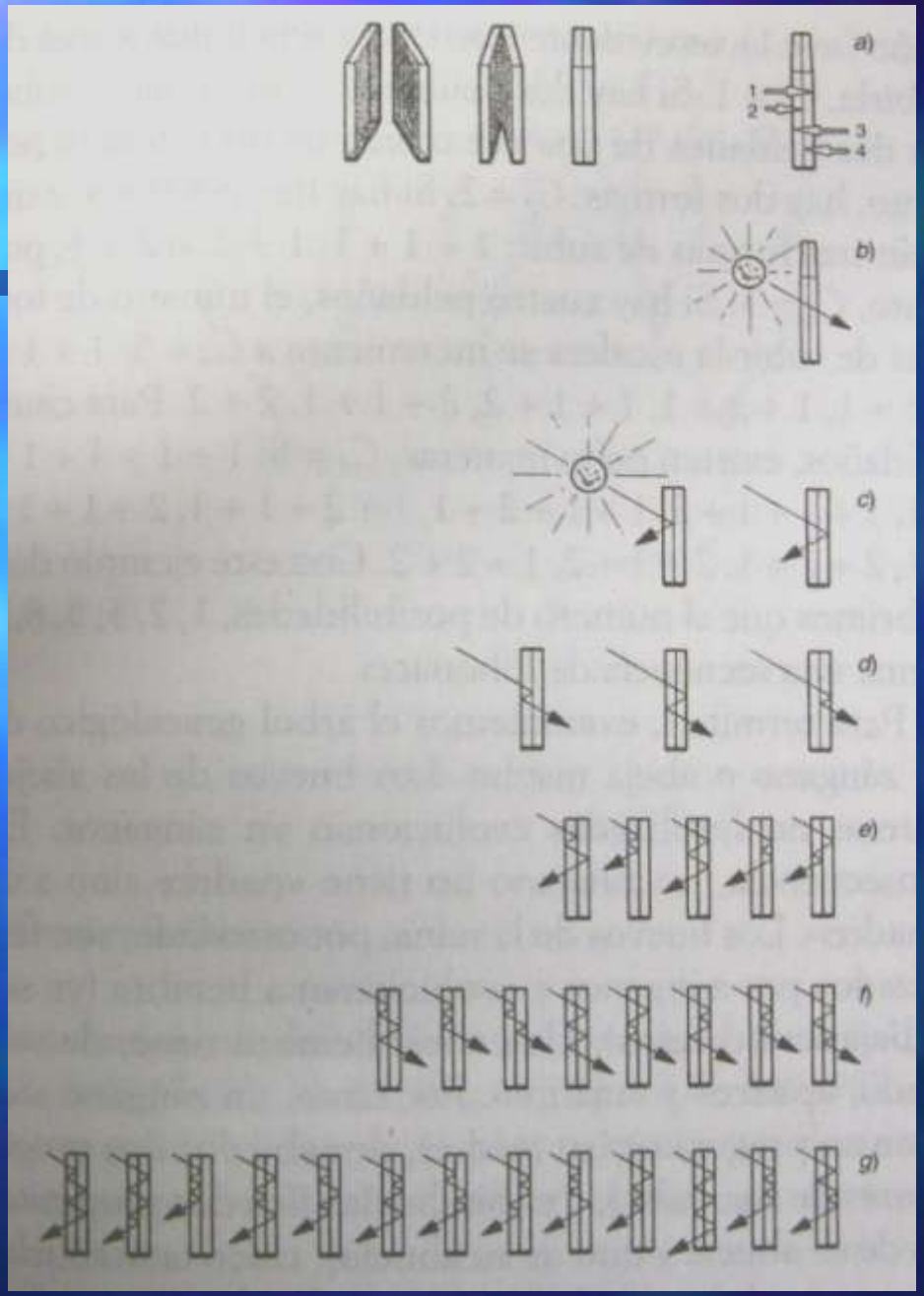


¿Cuántas rutas distintas puede seguir para llegar a la celdilla número 8? ¿Y cuántas rutas para llegar a la celdilla 12? Si el viaje a una celdilla determinada lo puede hacer a través de 2584 rutas, ¿a qué celda llega en cada una de estas rutas?

TAMBIÉN EN LA ÓPTICA

Tenemos dos placas de dos tipos de cristal ligeramente distintos, colocados uno frente al otro. Cuando dirigimos una fuente de luz que los atraviese, los rayos pueden reflejarse en el interior en cuatro superficies reflectoras antes de salir por el otro lado.

Veamos las trayectorias posibles en función del número de reflexiones internas


a)
1
2
3
4
b)
c)
d)
e)
f)
g)

Otro problema Fibonacci

Un niño intenta subir una escalera. El número máximo de peldaños que puede subir de una sola vez es dos; es decir, puede subir o bien uno o bien dos peldaños cada vez. Si hay n peldaños, ¿de cuántas formas puede subir las escaleras?

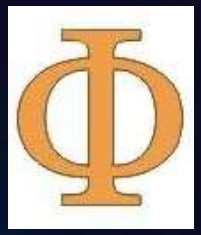
Nim de Fibonacci

- Para dos jugadores.

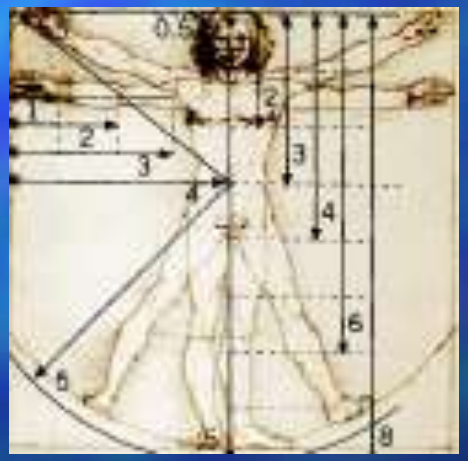
De un montón de 20 fichas, el primer jugador toma tantas fichas como quiera, (pero no todas). Después por turno, toman cada uno, un número de fichas comprendido entre 1 y el doble de las que ha cogido el anterior.

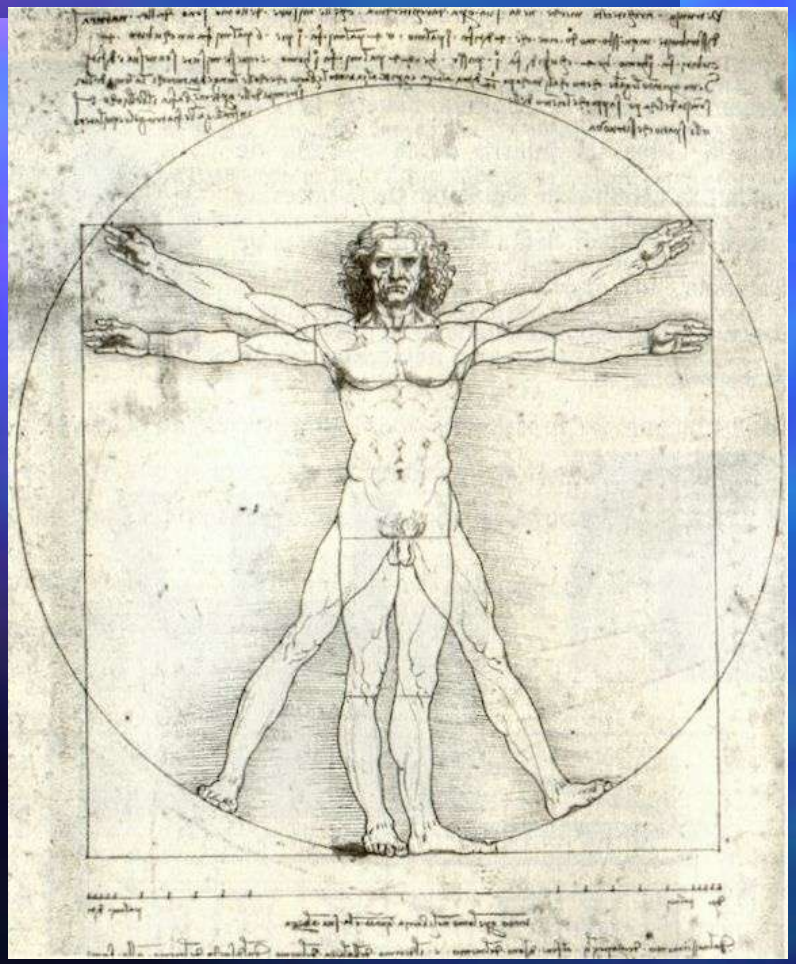
Gana quien toma la última. (O en la modalidad Misere pierde quien toma la última).

EL NÚMERO DE ORO Y LAS PROPORCIONES HUMANAS



- Los griegos utilizaron números para buscar proporciones armoniosas en las esculturas humanas.
- A las proporciones ideales las llamaron **canon**.
- Pacioli propone un hombre perfecto en el que las relaciones de su cuerpo sean:

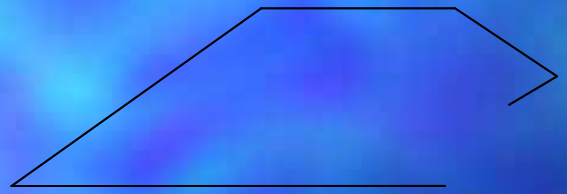




- Vitruvio da referencias sobre las proporciones de la figura humana.
    - Altura=Envergadura
    - Hombre tumbado con los brazos y los pies abiertos describe un círculo.
- Leonardo encuentra una solución basada en que el cuadrado y el círculo tienen centros distintos.
    - Proporción ideal=Lado cuadrado/radio=ϕ
    - Altura=1,618 x altura del ombligo

La proporción áurea en los seres vivos

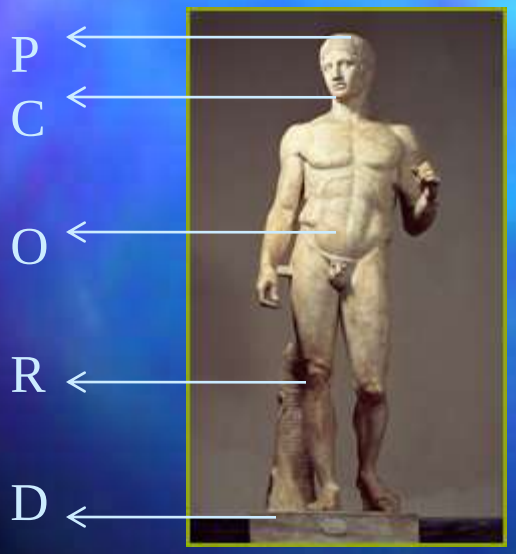
- En la Edad Media la medida humana se usaba como patrón.
- Los constructores de catedrales franceses usaban un instrumento como este:



Todos estas longitudes eran múltiplos de una unidad llamada línea que equivalía a 2,247 mm.

Palma	34 líneas	7,64 cm.
Cuarta	55 líneas	12,63 cm.
Palmo	89 líneas	20 cm.
Pie	144 líneas	32,36 cm.
Codo	233 líneas	52,36 cm.

- En 1855, Zeysing comprobó que el ombligo divide el cuerpo humano en sección áurea.
- Problema con nuestros alumnos:



$$\frac{OD}{OP} = \frac{RO}{RD} = \frac{CO}{PC} =$$

Hacemos la media aritmética de cada uno de los segmentos y calculamos los cocientes. ¿Qué obtendremos?

La relación entre las falanges de los dedos es el número áureo.

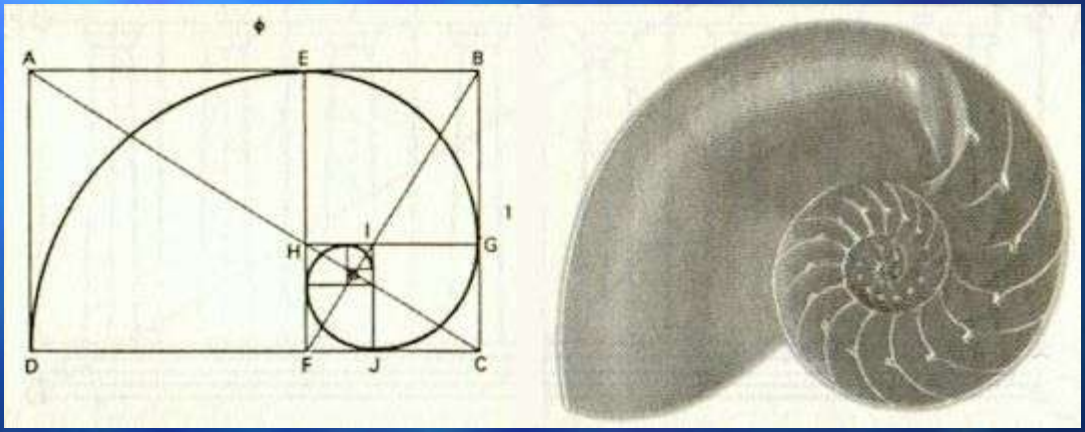
La relación entre la longitud de la cabeza y su anchura es también este número.

FI EN LA NATURALEZA

Podemos encontrar el número áureo en distintos seres que pueblan la naturaleza.

LA ESPIRAL LOGARÍTMICA

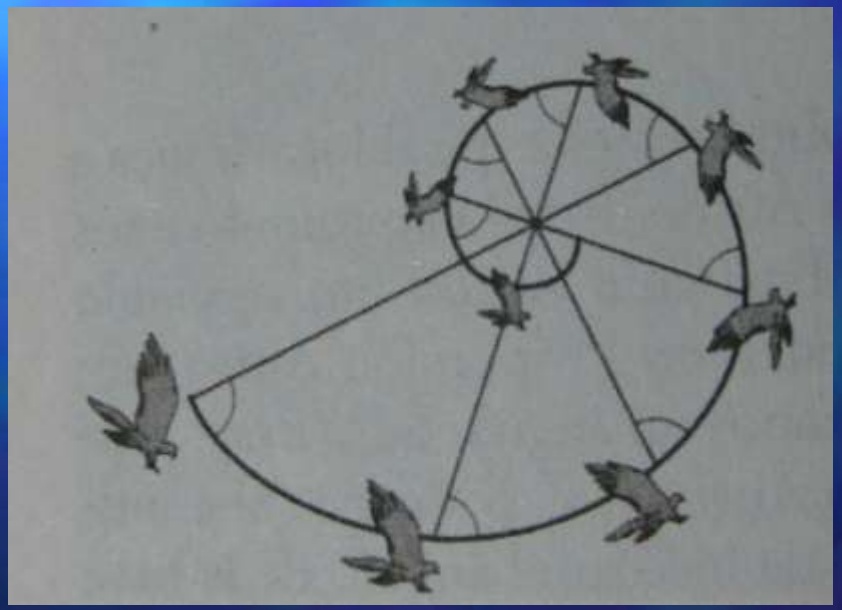
Por ejemplo, las **caracolas** y las **conchas de los moluscos** crecen en función de relaciones áureas.

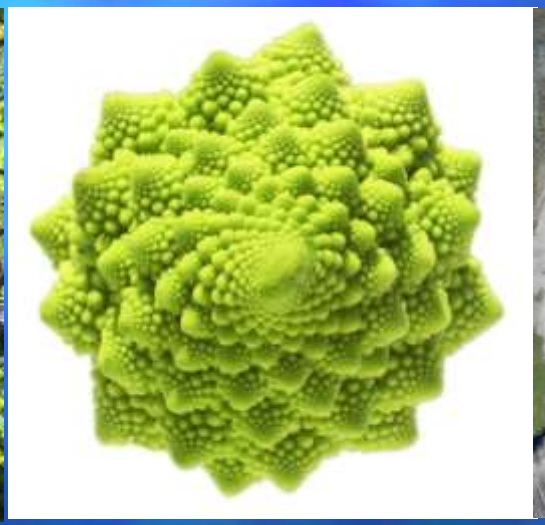


Además las diagonales AC y BF también están en la proporción áurea.

•Esta espiral es la que siguen los insectos cuando se acercan a un punto de luz

•Las aves de presa mantienen esta trayectoria cuando se lanzan a cazar. (la única forma de mantener la cabeza recta, sin variarla de posición, de forma que pueden tener siempre control visual de la presa y así maximizar la velocidad).

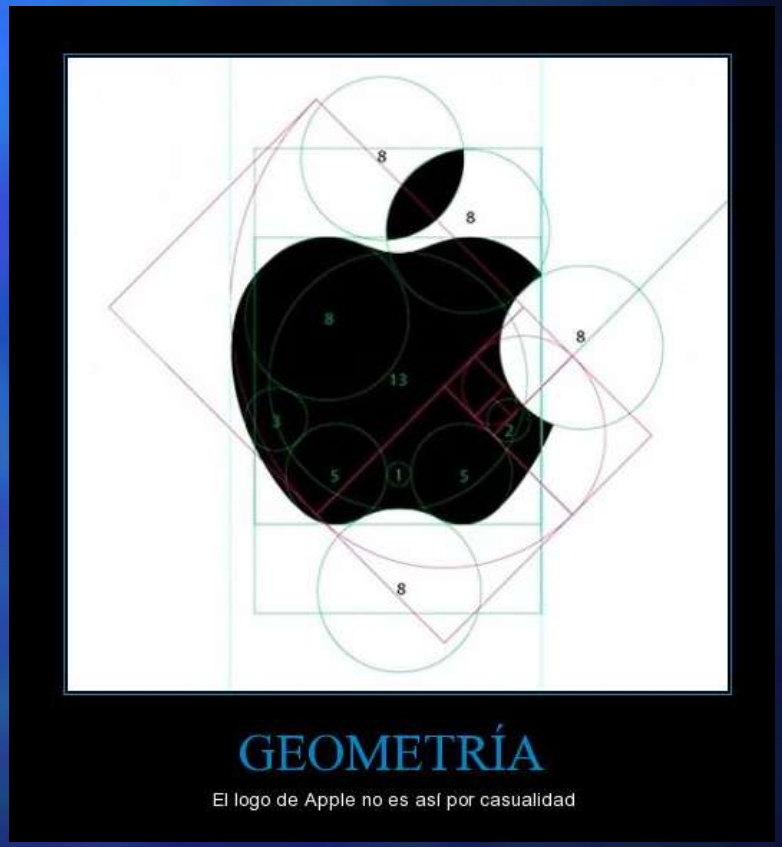




La espiral logarítmica vinculada a los rectángulos áureos también gobierna el crecimiento armónico de muchas formas vegetales y de mucho más...

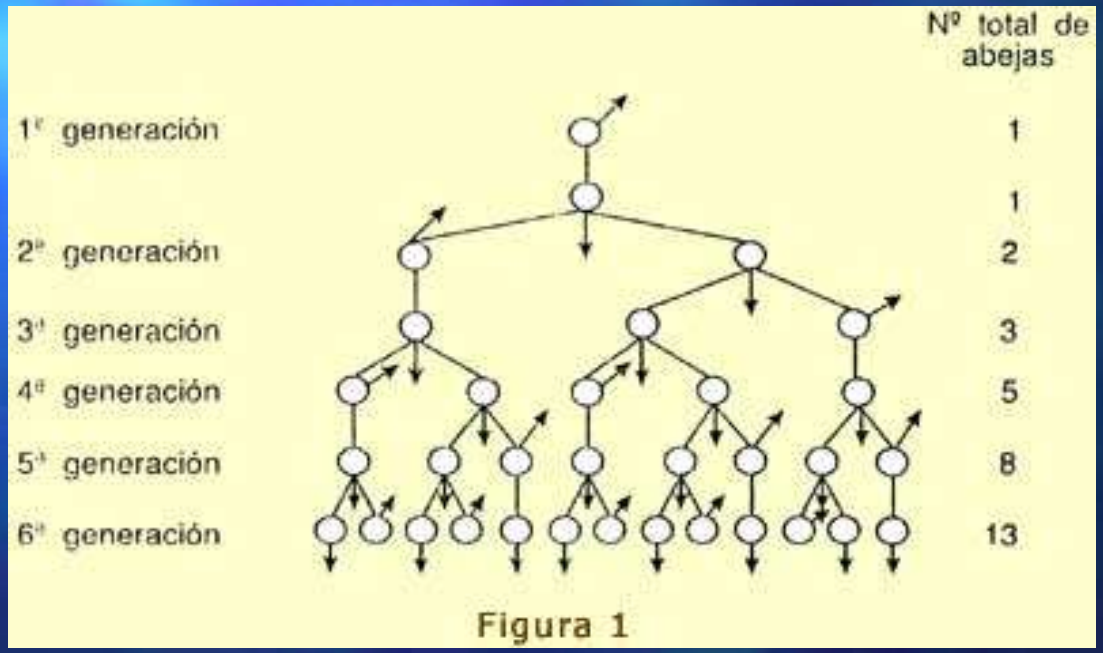
En geotecnia, la superficie de falla es el lugar geométrico de los puntos en donde el suelo ¨se rompe¨ y permite un deslizamiento, al estar sometido a cargas mayores a la que puede soportar. Estas superficies de falla en muchos casos son iguales o aproximables a una espiral logarítmica.

En un logo muy conocido…



GENEALOGÍA

El número de descendientes en cada generación de una abeja macho o zángano nos conduce a la sucesión de Fibonacci, y por lo tanto, al número áureo.



BOTÁNICA

Ciertas flores tienen un número de pétalos que suelen ser términos de la sucesión de Fibonacci

Kepler se dio cuenta de la frecuencia del 5 en las plantas.

El lirio tiene 3 pétalos, algunos ranúnculos 5 o bien 8, las margaritas y girasoles suelen contar con 13, 21, 34, 55 o bien 89.

Leonardo fue el primero en constatar la disposición espiral de las hojas alrededor del tallo

La parte de la botánica que estudia la disposición de las hojas a lo largo de los tallos de las plantas se denomina Filotaxia.

Esta disposición permite a las hojas una captación uniforme de la luz y aire, siguiendo, normalmente, una trayectoria ascendente y en forma de hélice.

•Si tomamos la hoja de un tallo y contamos el número de hojas consecutivas (lo llamaremos “n”) hasta encontrar otra hoja con la misma orientación, este número es, por regla general, un término de la sucesión de Fibonacci.

•Si mientras contamos dichas hojas vamos girando el tallo (en el sentido contrario a las agujas del reloj, por ejemplo) el numero de vueltas “m”que debemos dar a dicho tallo para llegar a la siguiente hoja con la misma orientación resulta ser también un término de la sucesión.

Se llama "característica" o “divergencia" del tallo a la fracción m/n.

Figura 2

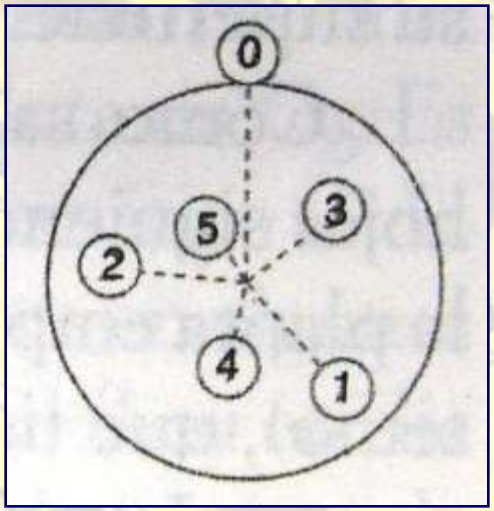
En el sauce llorón 3/8 y en el almendro 8/13.

SERIE DE SCHIMPER-BRAUN

Fracción	Ángulo de divergencia	Familia
1/2	180º	Poáceas; olmo; tilo, lima
1/3	120º	Ciperáceas, haya, avellano, mora
2/5	144º	Rosa, Corylus, roble manzano,acebo
3/8	135º	Aster,Brassica, chopo, peral
5/13	138º 27'	Sempervivum, Piñas del Pinus Strobus, sauce, almendro
8/21	137º 8'	Piñas del Pinus Sylvestris, Pinus nigra, Picea Abies
21/55	137º 27'	Algunos capítulos de compuestos. Ejemplo: Torta de girasol de 55/89.
34/89	137º 31'	
55/144		

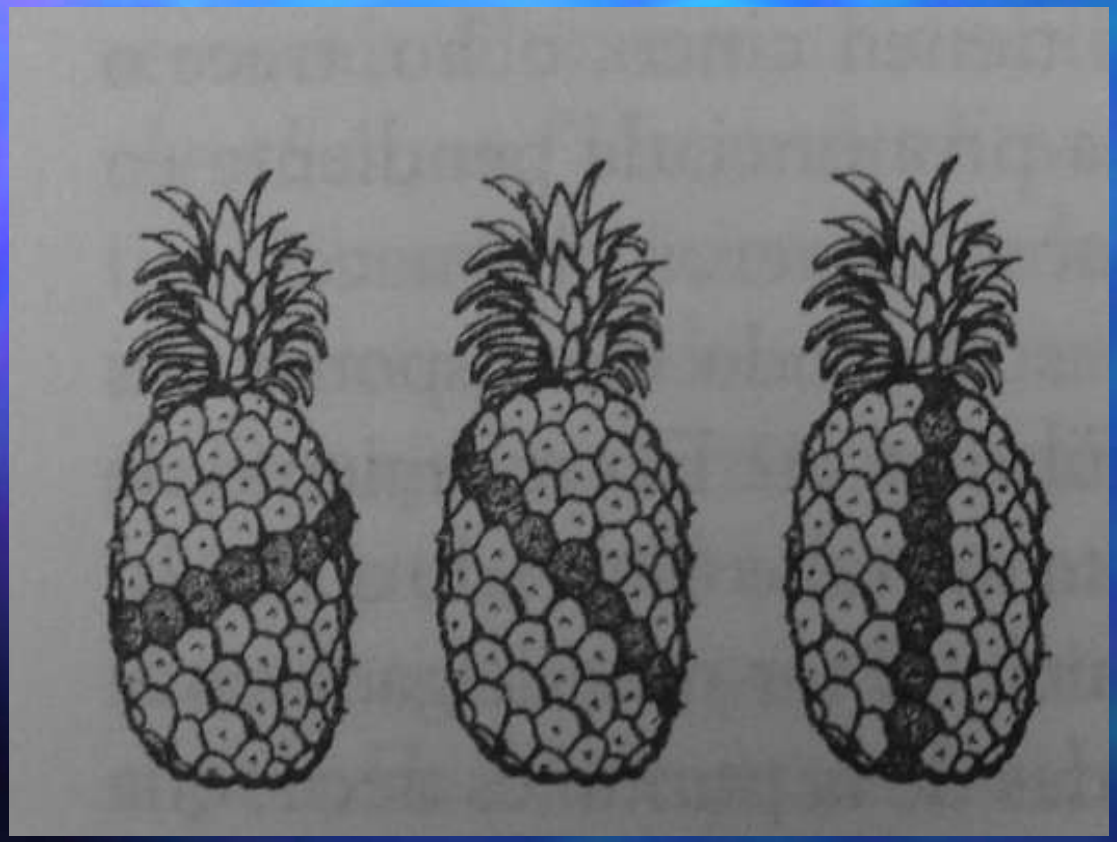
ÁNGULO IDEAL O ÁNGULO DE ORO

$a_n/a_{n+2} \longrightarrow$	$1/\phi^2$	$1/\phi^2 * 360^o = 137^o\ 30´28´´$



Disposición de las hojas del girasol con una distancia angular aproximada de 137,5º

EN LA PIÑA



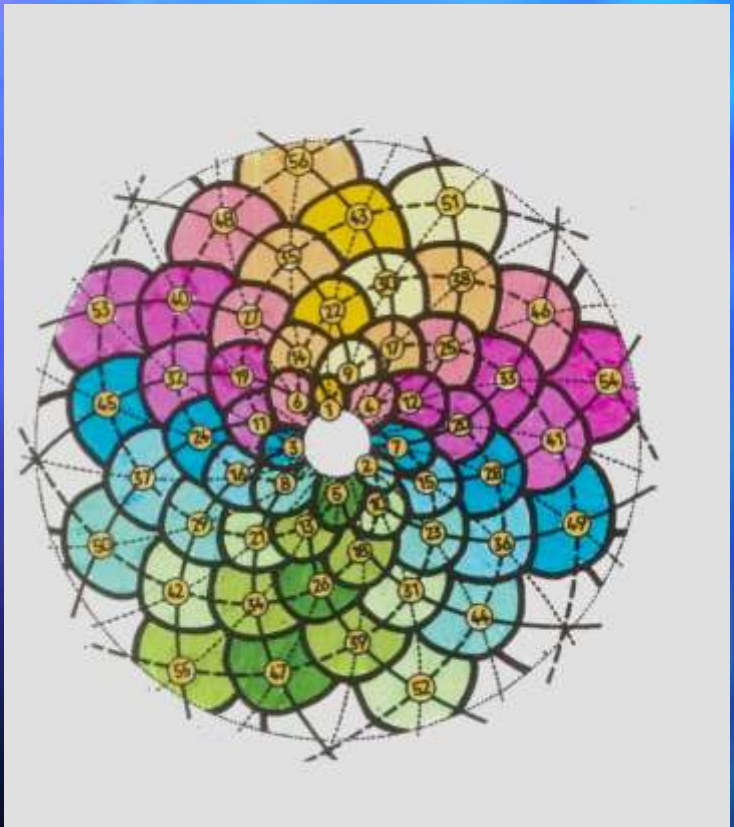
Cada escama hexagonal forma parte de tres espirales diferentes.

8 13 21

Las "hojas" de una piña de pino tienen, por regla general, una característica de 5/8 o bien 8/13.

Presentan propiedades similares las hojas de las lechugas, las ramas de las palmeras, el ficus, los girasoles etc.,

PIÑA DE PINO ALBAR



Las escamas se numeran del 1 al 56 según el orden de aparición.

Las líneas de puntos unen escamas superpuestas.

El número de escamas entre una determinada y la siguiente superpuesta es un término de la sucesión de Fibonacci.

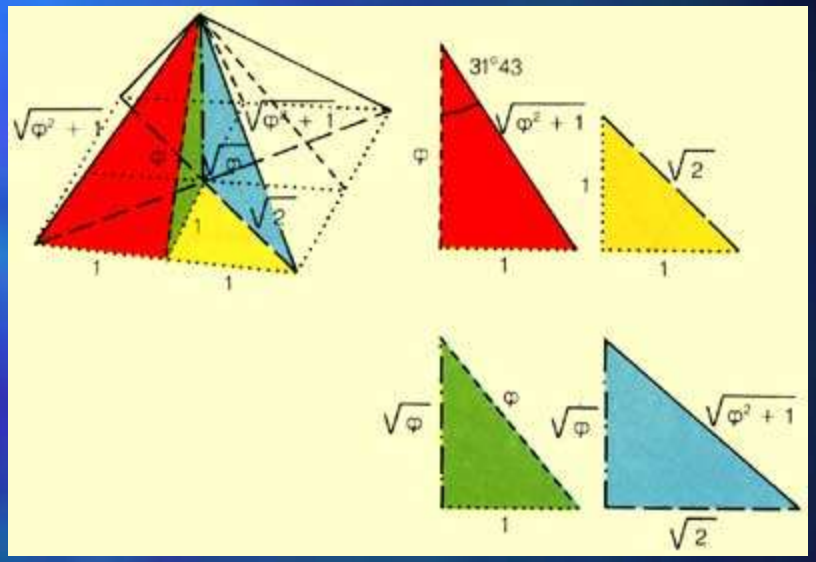
En el dibujo es 21.

Teniendo en cuenta el orden de las escamas dentro de una misma espiral, la diferencia entre dos escamas consecutivas vuelve a ser un número de la sucesión de Fibonacci.

En el dibujo es 13.

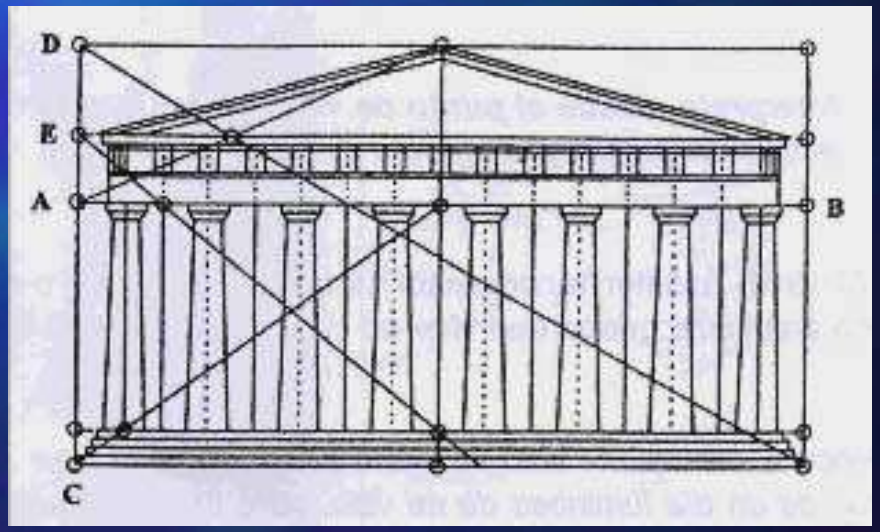
FI EN EL ARTE Y EN LAS CONSTRUCCIONES

El primer uso conocido del número áureo en la construcción es la **pirámide de Keops**, 2600 a.C.



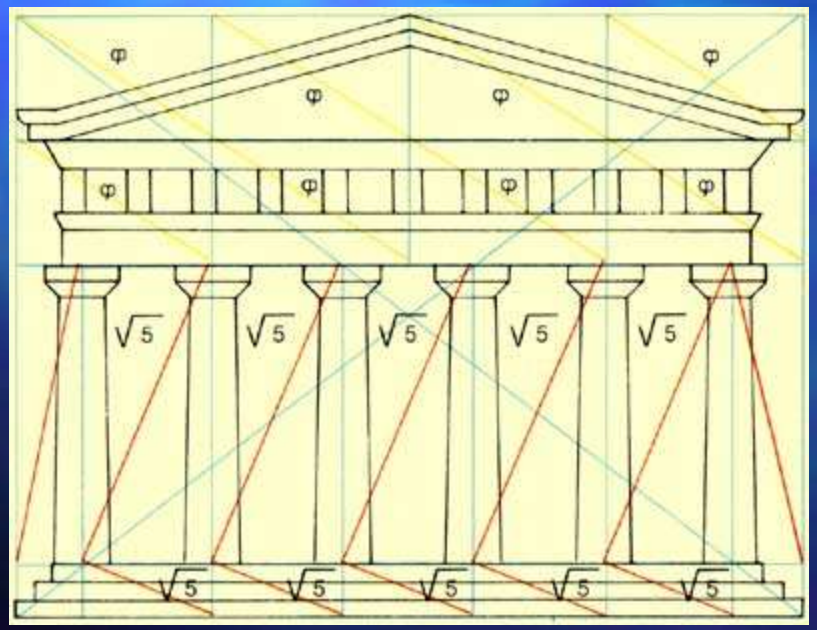
$$\sqrt{1^2 + \sqrt{\Phi}^2} = \sqrt{1 + \Phi} = \sqrt{\Phi^2} = \Phi$$

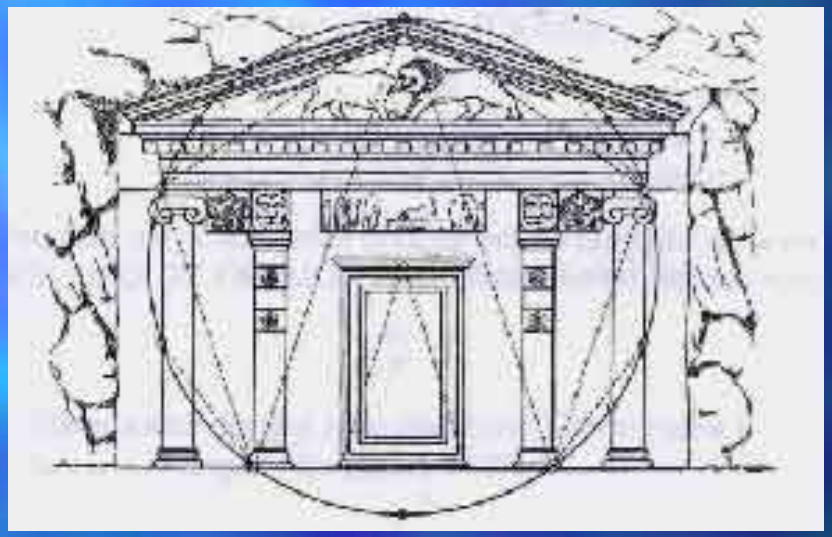
El **Partenón de Atenas** utiliza el rectángulo áureo para organizar su estructura.



Se puede comprobar que AB/CD=Φ
También AC/AD= Φ y CD/CA=Φ

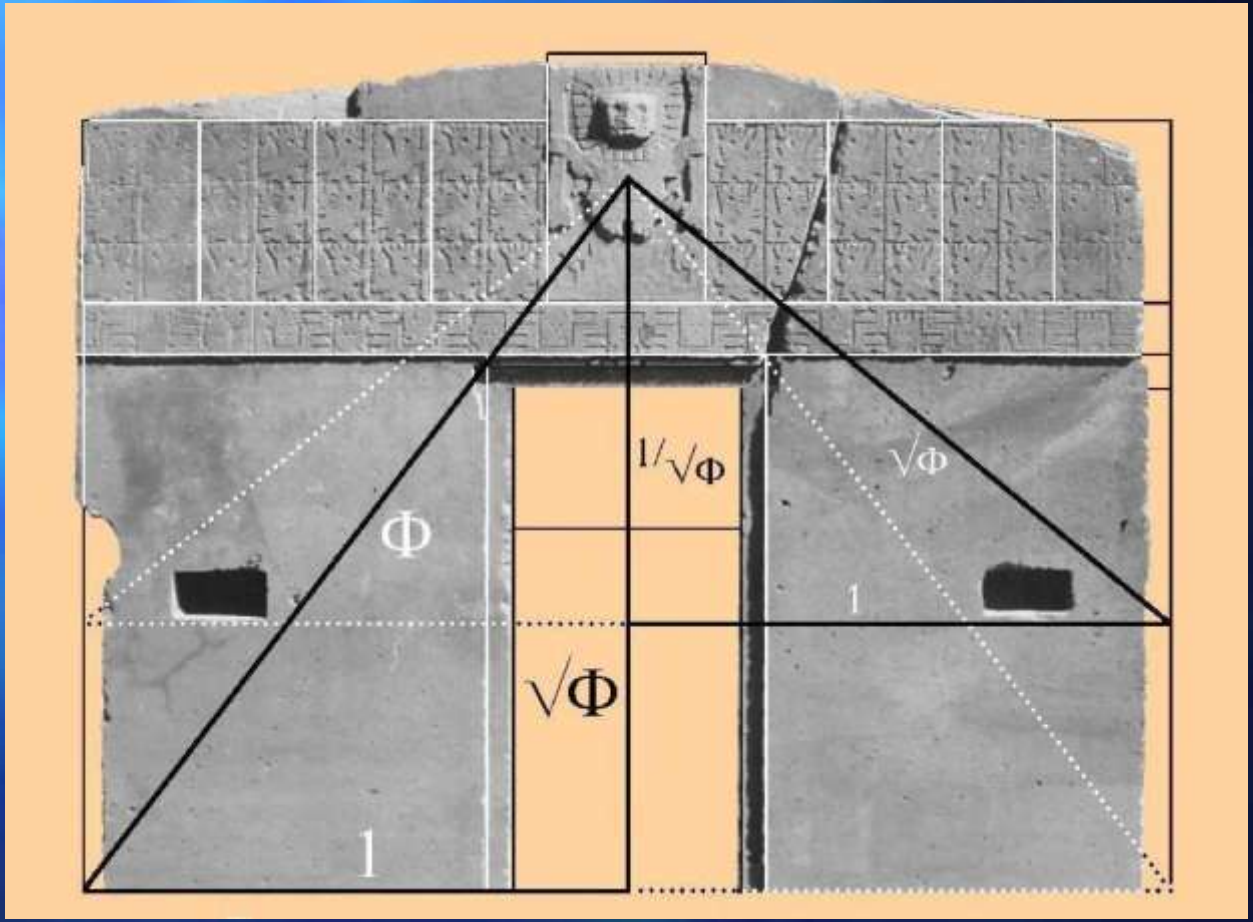
El **Templo de Ceres** en Paestum (460 a.C.) tiene su fachada construida siguiendo un sistema de triángulos áureos.





La **Tumba Rupestre de Mira** en Asia Menor basa su construcción en un pentágono, en el que el cociente de la diagonal y el lado de dicho pentágono es el número áureo.

Puerta del Sol de Tiwanaku

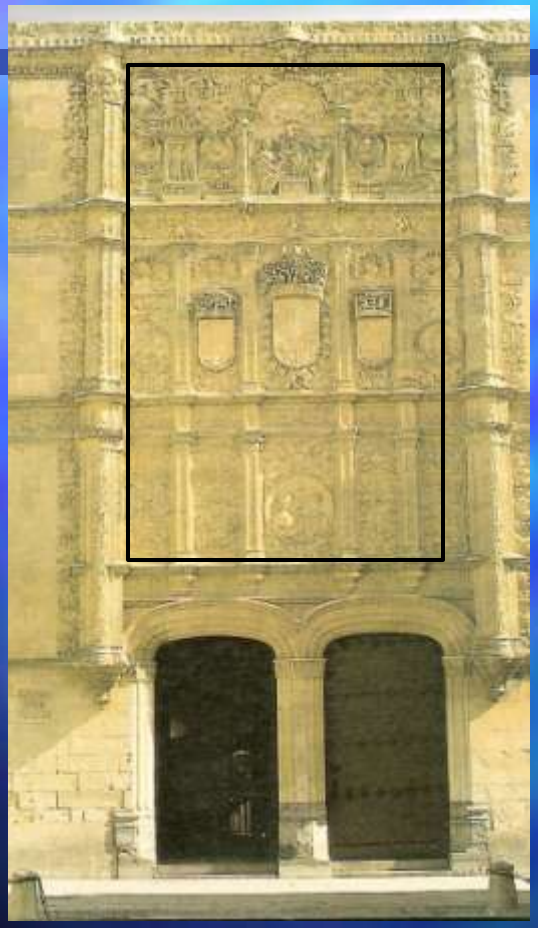


Análisis geométrico realizado por Dalí basado en el pentagrama místico pitagórico.

Cuadro de Dalí, **Leda atómica**,

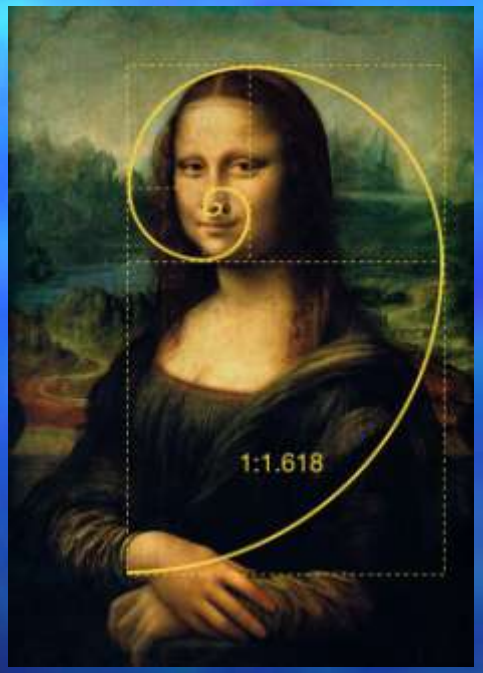
pintado en 1949.

Los lados del rectángulo en el cual está idealmente inscrita la estatua del **Apolo de Belvedere** están relacionados según la sección áurea.

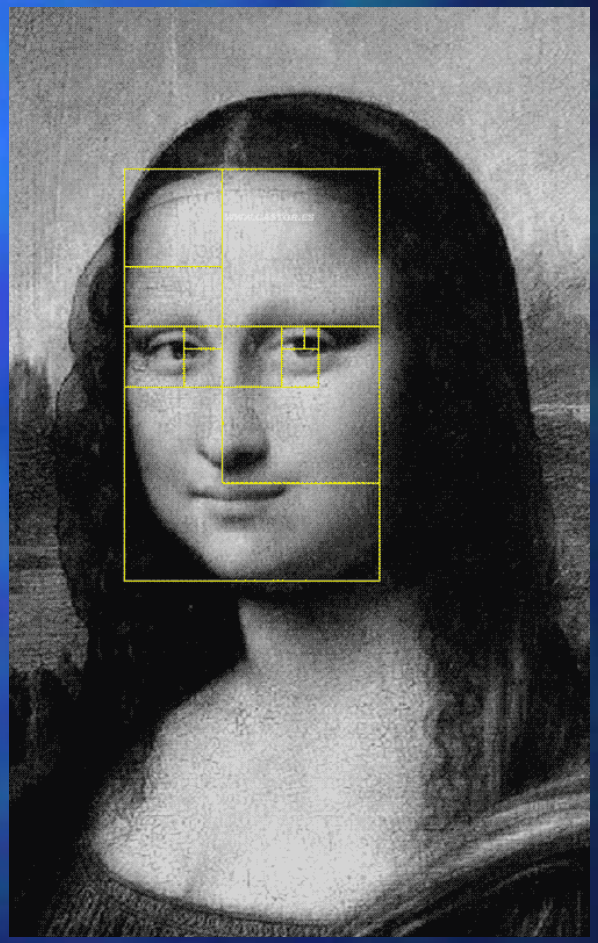


Universidad de Salamanca

Las Meninas



La Gioconda



IES Cardenal López Mendoza

FI EN NUESTRA VIDA DIARIA

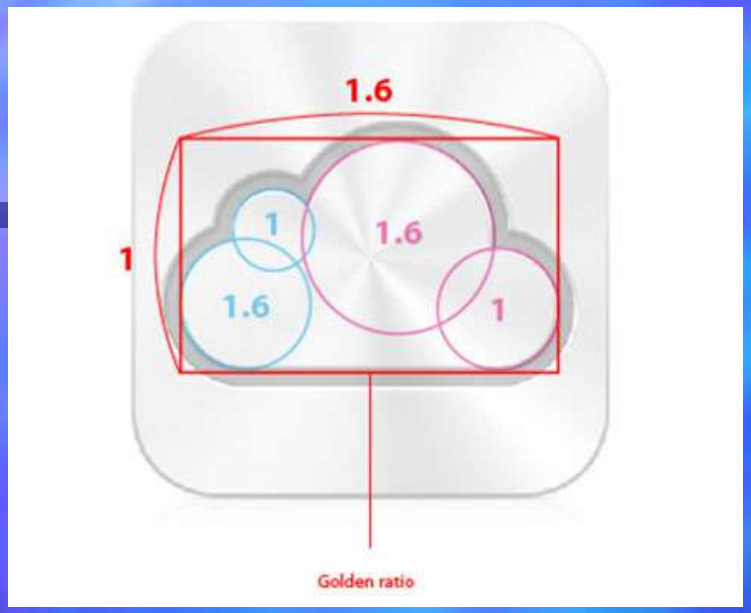
Ejemplos de rectángulos áureos los podemos encontrar en:

Las tarjetas de crédito.

En nuestro carnet de identidad

Y también en las cajetillas de tabaco.

También lo podemos encontrar en la construcción de muebles, marcos para ventanas, camas, postales, etc.



icloud

Naciones Unidas. Nueva York

106/66=1,606

Ipod Classic

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

RECURSOS

Libros:

Blasco, F.: *Matemagia*. Ed. Planeta.

Corbalán, F.: *La proporción áurea. El lenguaje matemático de la belleza.* RBA

Livio, M.: *La proporción áurea*. Ed. Ariel.

Ghyka, M. C.: *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes.* Ed. Poseidón

Ghyka, M. C.: *El número de oro. I Los ritmos. II Los ritos.* Ed. Poseidón.

Pacioli, L.: *La Divina Proporción*. Ed. Akal.

Ghyka, M.C.: *Filosofía y mística del número.* Ed. Poseidón.

Vídeos:

El pato Donald en el país de las matemáticas.

- **Webs:**
- http://www.epsilones.com/paginas/a-bestiario.html#bestiario-razonaurea
- http://thales.cica.es/files/glinex/practicas-glinex05/matematicas/oro/El_nzmero_de_oro.pdf
- http://personal.telefonica.terra.es/web/imarti22/actividades/actividades/numero/marco_numero.htm
- http://rt000z8y.eresmas.net/El%20numero%20de%20oro.htm
- http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/razon_aurea/aureo1.htm
- http://juegos-matematicos.blogspot.com.es/2009/02/glosario-matematico-el-numero-de-oro.html

FIN