El área; un método para probar resultados y resolver problemas

Francisco Bellot Rosado

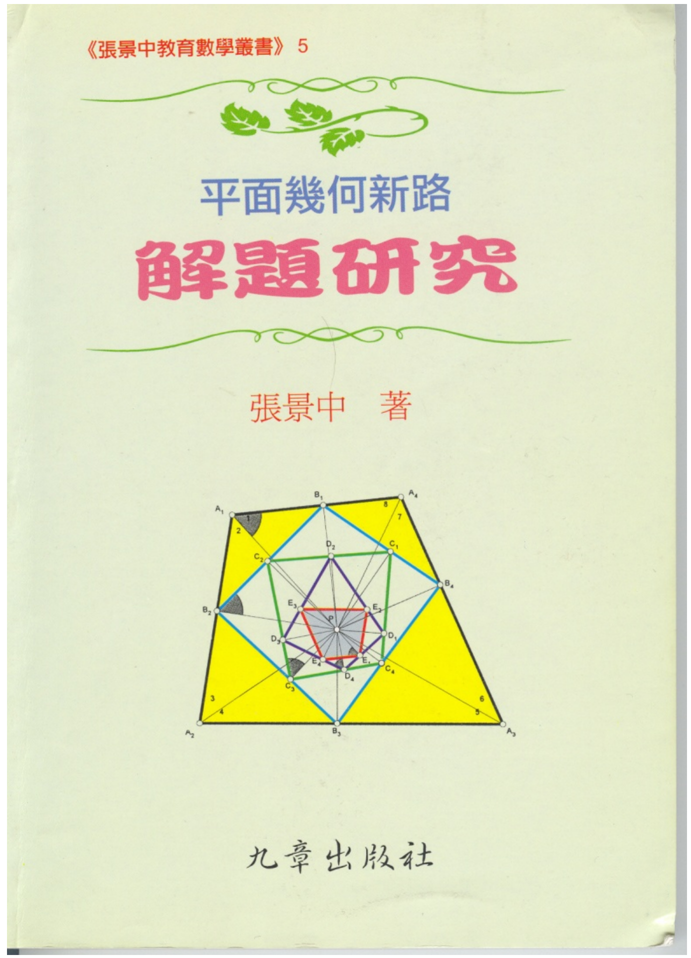
Seminario Nacional ESTALMAT

Medina del Campo, 12,13 y 14 de abril 2013

Pequeño prólogo bibliográfico

- Aunque en un artículo la costumbre es terminar con la bibliografía, en una charla con tiempo limitado puede ser mejor empezar comentando algunas fuentes bibliográficas, por si la premura de tiempo obliga a cortar parte de la presentación.
- El primer libro que yo conocí, dedicado al tratamiento de la geometría basándose en el concepto de área, se remonta a 1995, y su portada aparece en la siguiente diapositiva:

J.C.Zhang, *Una nueva visión de la Geometría, Sichuan Ed.,1992*

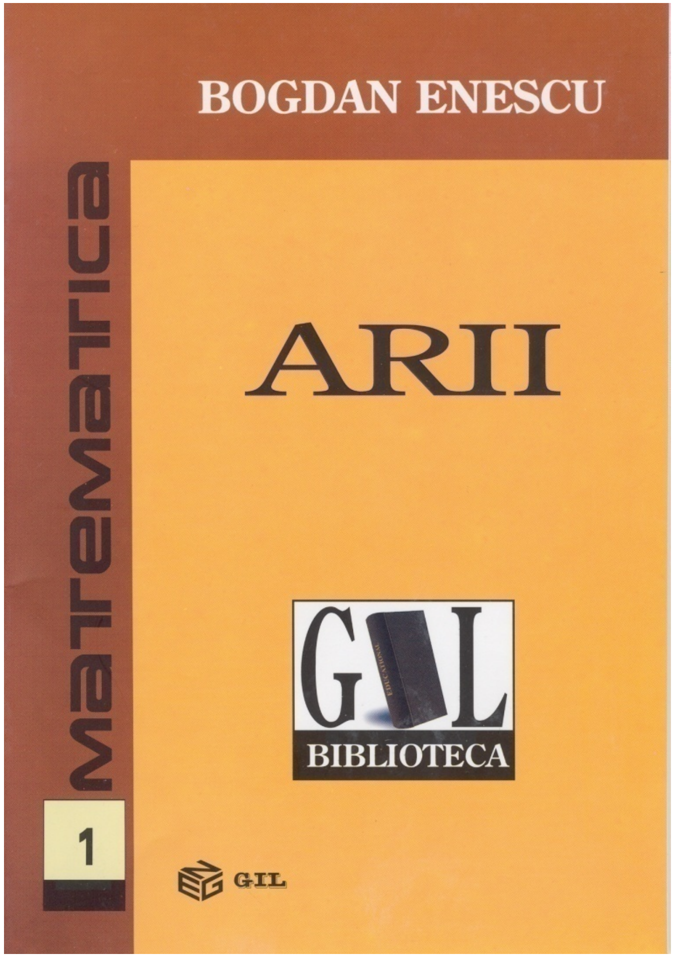


- Aunque el libro está en chino, las figuras y fórmulas aparecen con notación occidental, de manera que algunas propiedades se pueden intuir y luego demostrar.
- En 1995, Andy Liu hizo un comentario en inglés de este libro en *Crux Mathematicorum,* y así se dio a conocer en los países occidentales.
- Mucho más recientemente (Marzo de 2008) apareció una pequeña obra maestra, esta vez en francés:

J.M.Slowik, *Invent'Aire!; ACL-Les éditions du kangourou*

- En este libro, de sólo 48 páginas y que se puede conseguir (pagando) en la página web www.mathkang.org , se incluyen 88 ejercicios y problemas sobre las relaciones que hay entre el área de un cuadrado y la de figuras obtenidas de él por cortes rectilíneos, o de un triángulo y las que se obtienen de él dividiendo los lados en cierto número de partes. Más adelante veremos algunos ejemplos de este libro, que yo recomiendo con énfasis a los profesores de ESTALMAT.

B.Enescu, *Arii*, *Editura GIL, 2006*



- Otra pequeña monografía sobre áreas (64 páginas; 11 capítulos, numerosos ejemplos resueltos y otros propuestos, con soluciones en el capítulo undécimo), en rumano. El rumano es la única lengua de origen latino de Europa oriental y no es difícil, para un lector español, leer literatura matemática en ese idioma. Los rumanos suelen escribir textos monográficos; hay, por ejemplo, otra con 200 problemas sobre el triángulo equilátero, otra con 200 problemas de ecuaciones funcionales en N, Z ó Q; otra más con 200 identidades e inecuaciones sobre la parte entera….
- Los libros rumanos son baratos, pero es casi imposible conseguirlos por Internet. Y cada año se publican muchos.

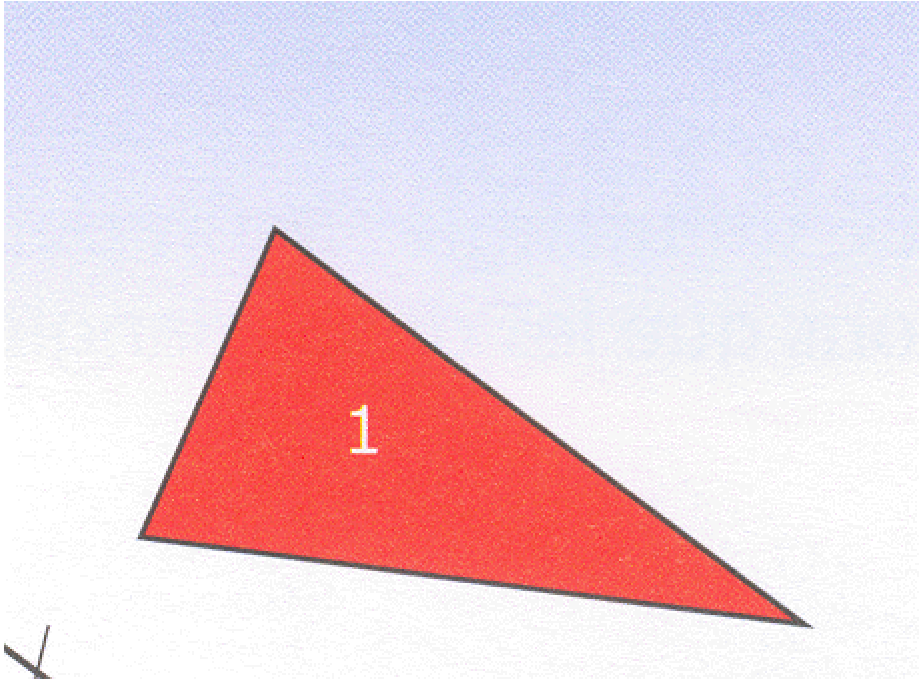
- Los ejemplos que siguen espero que ayuden a ilustrar el “método de las áreas” para demostrar algunos resultados y a resolver algunos problemas. Algunos de ellos los he utilizado en mis clases con alumnos de ESTALMAT; pero otros son de un nivel algo más avanzado, ya que, al fin y al cabo, esta es una reunión de profesores.

Aplicaciones del método de las áreas

- La propiedad de la mediana de un triángulo, que divide al mismo en otros dos de la misma área, es elemental, pero se puede utilizar para demostrar resultados *más fuertes*

Problema 1

Empezamos con un inofensivo triangulito de área 1 ...



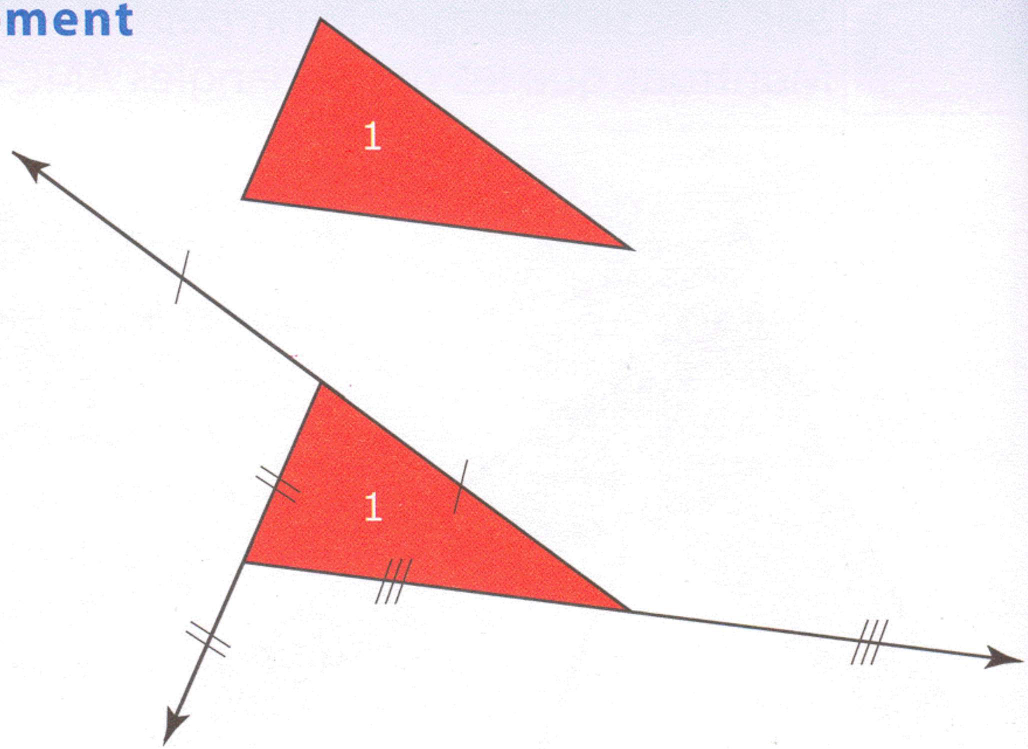
Prolongamos los lados como se indica en la figura ...

3

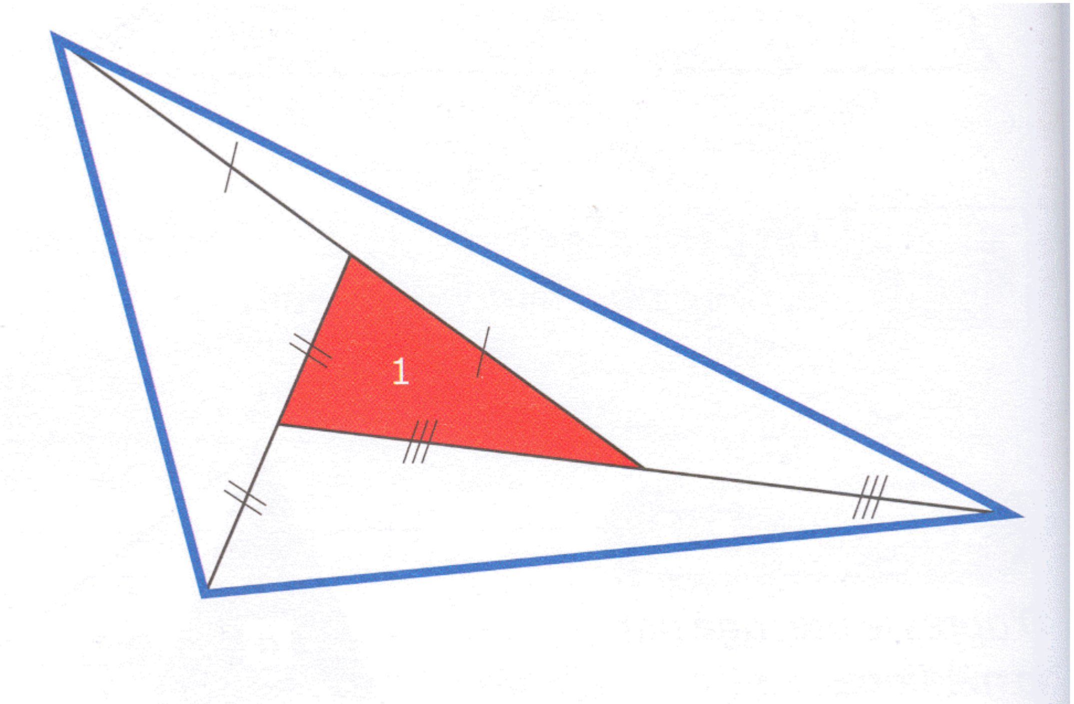
L'agrandissement du triangle

Prenons un petit triangle d'aire 1.

Agrandissons-le en prolongeant ses côtés !



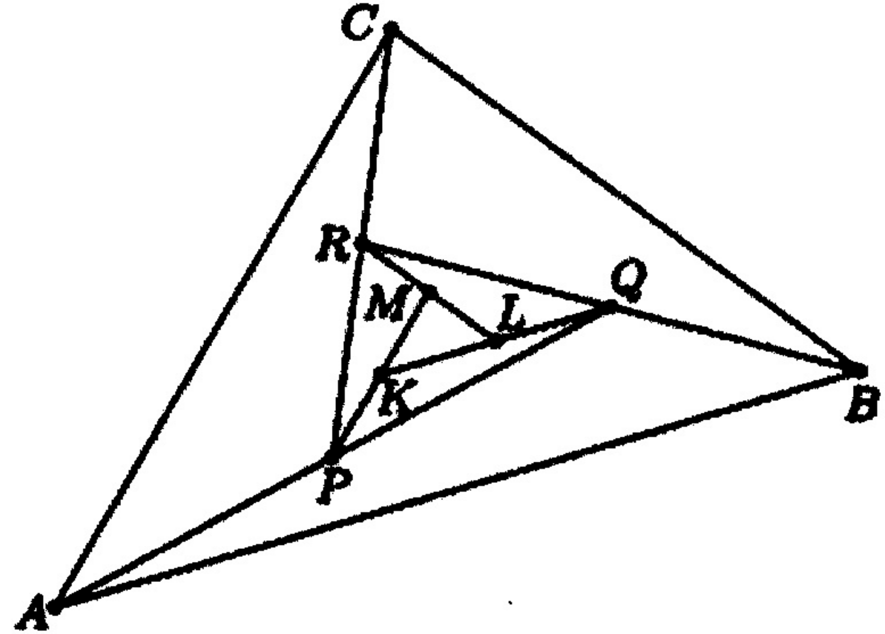
¿Cuánto vale el área del triángulo azul de la figura?



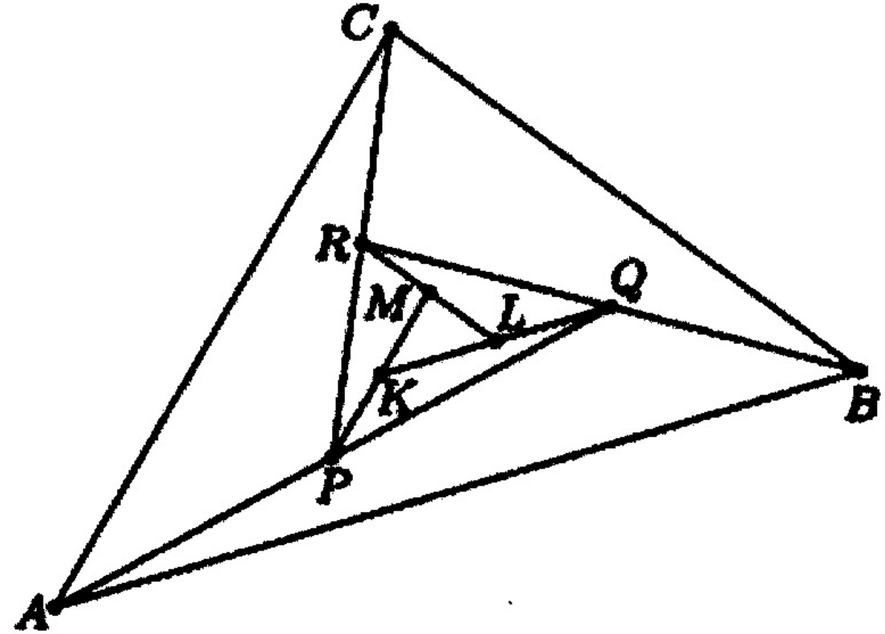
UN EJERCICIO DE ÁREAS DE KÖMAL 2011 (la revista escolar húngara)

En la figura, el punto medio de AQ es P; el punto medio de BR es Q; el punto medio de CP es R; el punto medio de PM es K; el punto medio de RL es M.

Si el área del triángulo ABC es 441 cm^2, calcular el área del triángulo KLM.

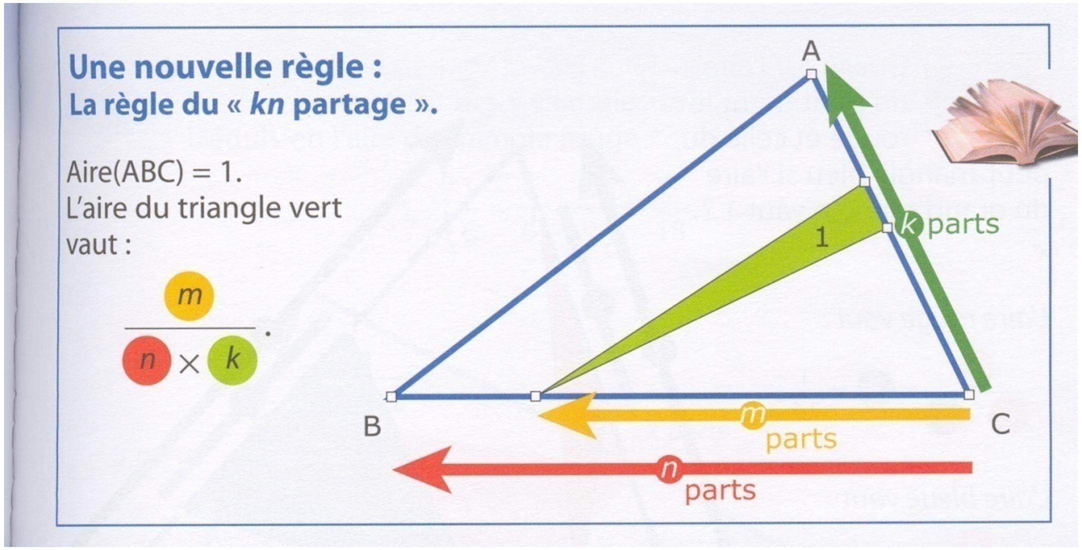


El área de KLM es la séptima parte de la de PQR, y la de este triángulo es la séptima parte de la de ABC. Por tanto [KLM] = [ABC]/49 = 441/49 = 9 cm^2.

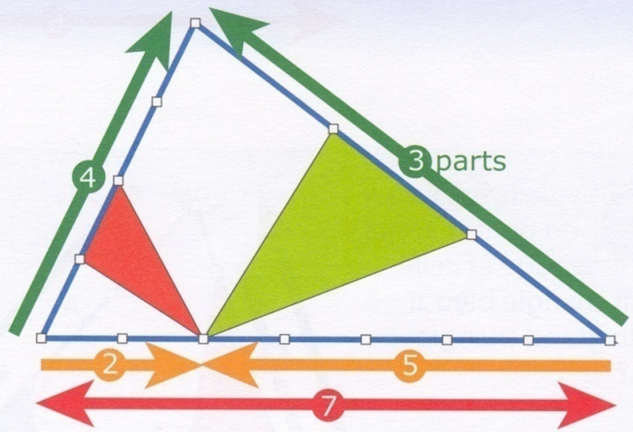


Las “joyas” del libro de Slowik

Reproduzco a la derecha las páginas del libro de Slowik donde se muestran los casos más complicados de división de un triángulo en partes formadas dividiendo los lados en diferente número de partes iguales:



16 L'aire du grand triangle vaut 1.
Combien vaut l'aire verte ? Combien vaut l'aire rouge ?

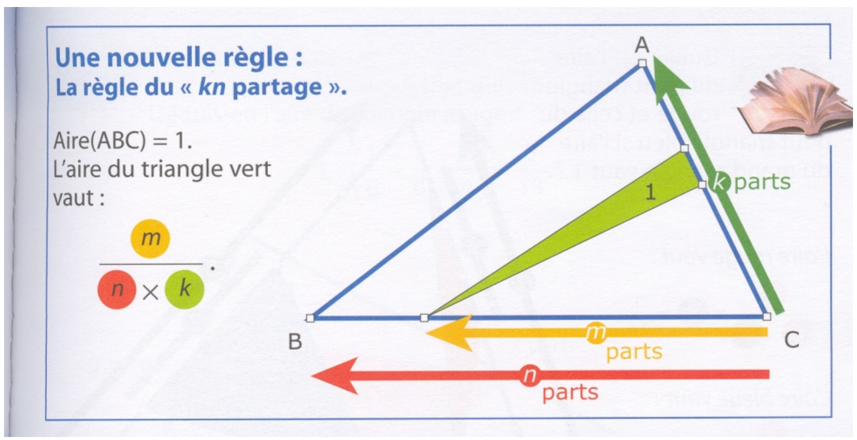


Solution ex. 16 *D'après la règle ci-dessus du* kn *partage :*

L'aire verte vaut : $\dfrac{5}{7 \times 3} = \dfrac{5}{21}$.

L'aire rouge vaut : $\dfrac{2}{7 \times 4} = \dfrac{1}{14}$.

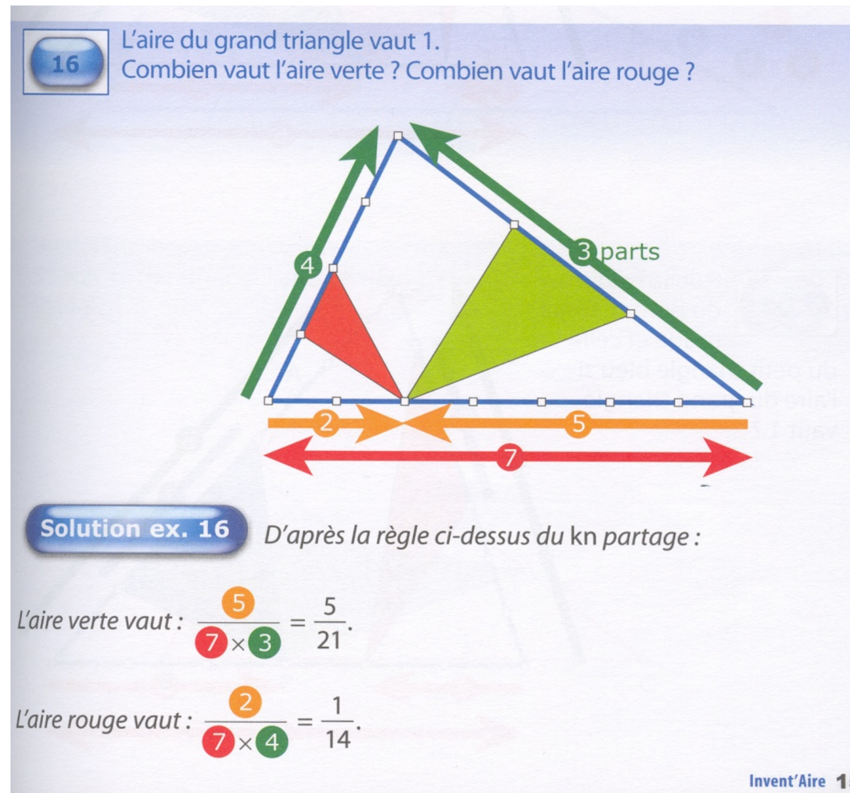
Podemos compararlas juntas



Une nouvelle règle :
La règle du « *kn* partage ».

Aire(ABC) = 1.
L'aire du triangle vert vaut :

$$\frac{m}{n \times k}.$$



16 L'aire du grand triangle vaut 1.
Combien vaut l'aire verte ? Combien vaut l'aire rouge ?

Solution ex. 16 *D'après la règle ci-dessus du* kn *partage :*

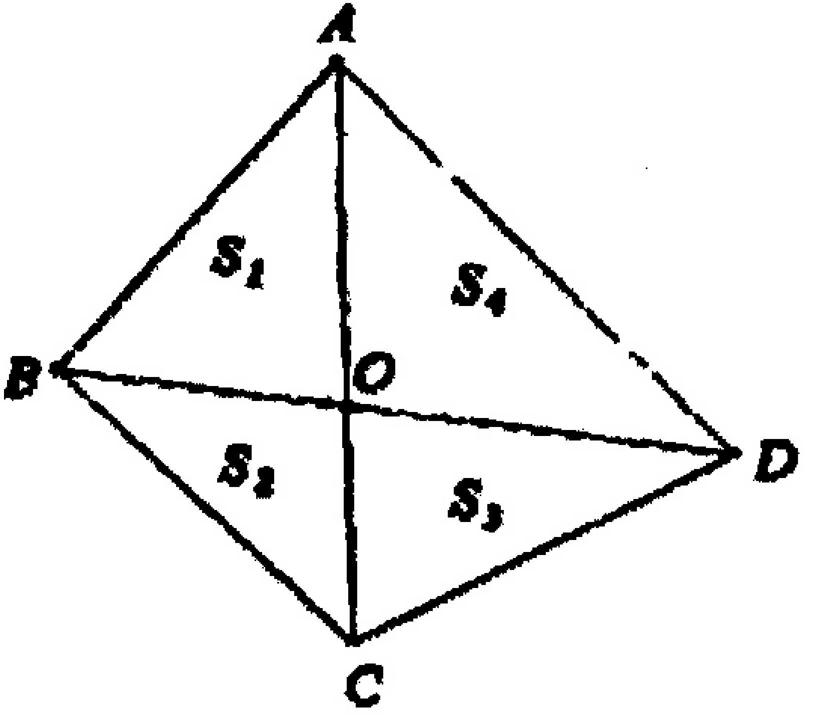
L'aire verte vaut : $\frac{5}{7 \times 3} = \frac{5}{21}$.

L'aire rouge vaut : $\frac{2}{7 \times 4} = \frac{1}{14}$.

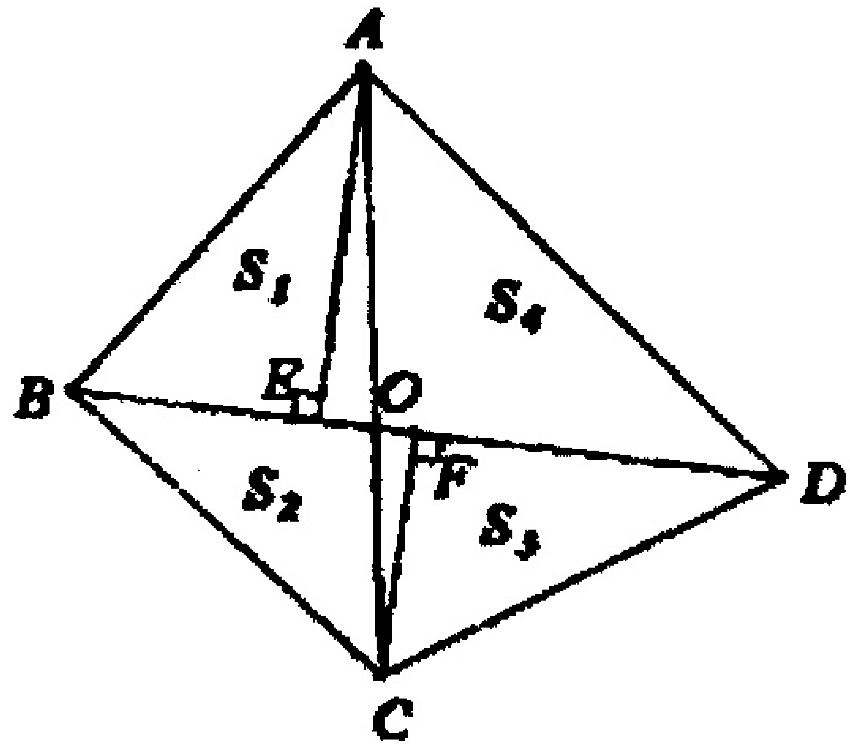
Un producto de áreas en cuadriláteros

En el cuadrilátero convexo ABCD, si O es el punto de intersección de las diagonales, el producto de las áreas de los cuatro triángulos con vértice O verifica

[OAB][OCD]=
[OBC][ODA]

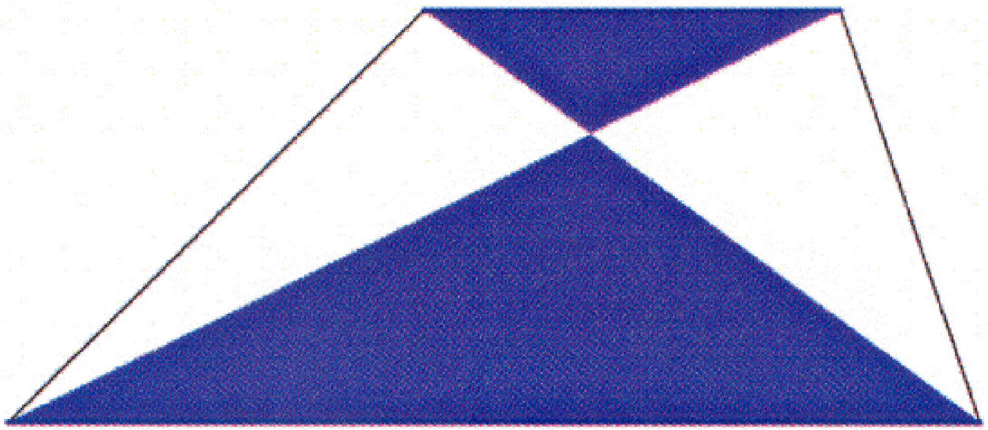


Basta proyectar dos vértices opuestos sobre la diagonal que une los otros dos: Los cuatro triángulos con vértice común en O (punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero) comparten alturas de dos en dos, con lo cual el producto de las áreas es el mismo.



Un problema de la Olimpiada regional de ESO 2010 (Ávila)

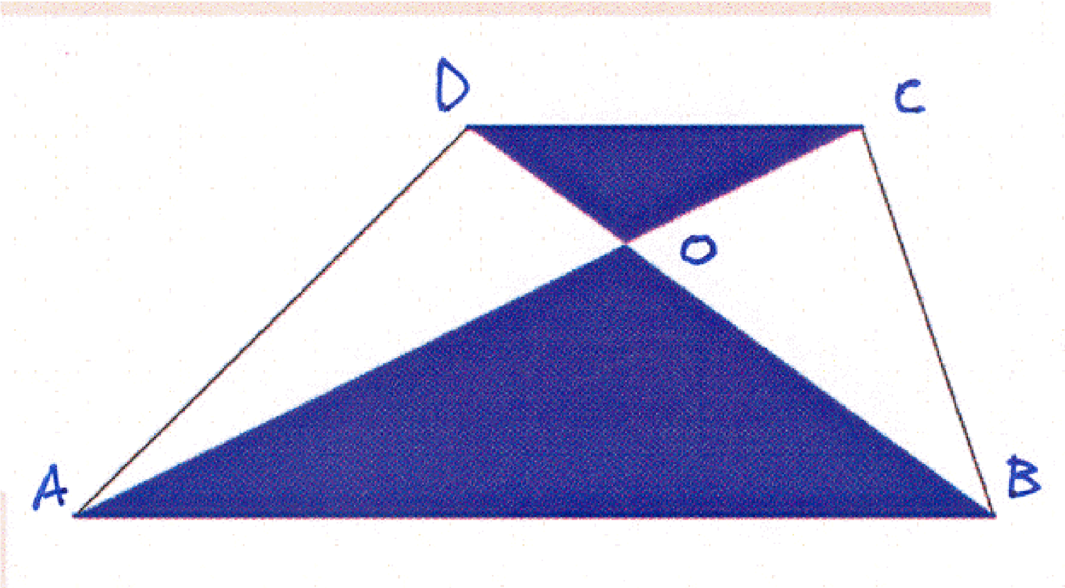
Las diagonales del trapecio de la figura lo dividen en cuatro triángulos. Si las áreas de los triángulos azules son 18 y 32 cm. cuadrados, ¿cuál es el área del trapecio?



Los triángulos ADB y ACB tienen la misma área, lo mismo que ocurre con las de los triángulos "blancos". Llamando S al área de uno de ellos, y aplicando el resultado anterior, será:

$$SxS = 18x32,$$

de donde es inmediato obtener que S = 24 y el área del trapecio es 98.



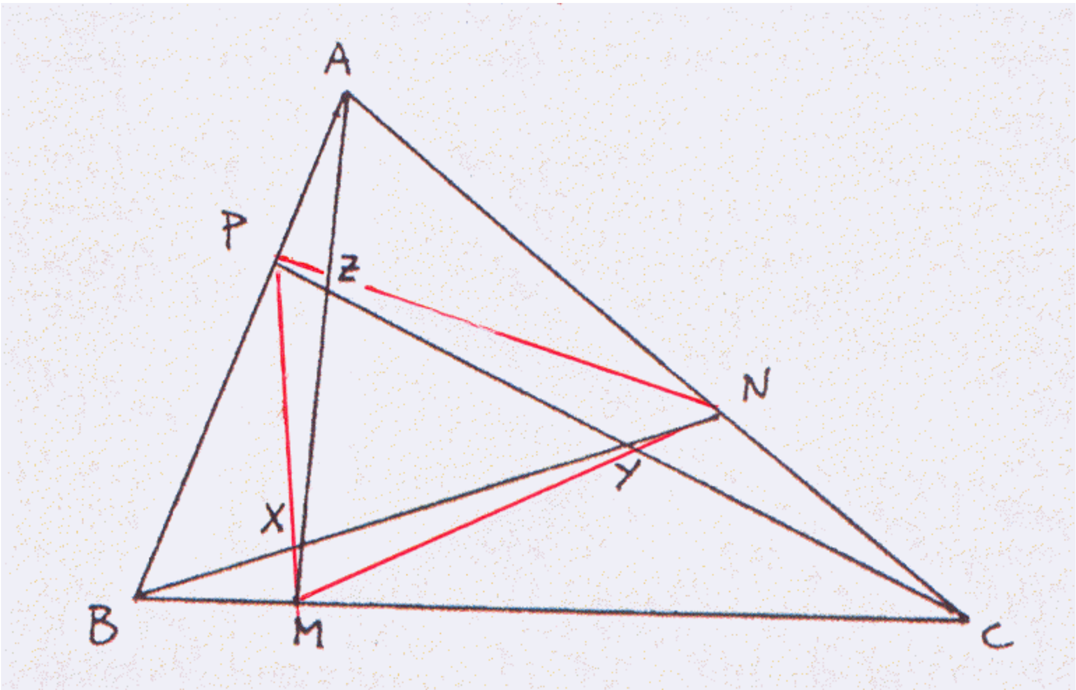
Un resultado que no demostraremos: el teorema de Routh

- Del teorema de Routh (1896) se conocen varias demostraciones en la bibliografía. En la *Revista Escolar de la OIM* hace algún tiempo publiqué una lección de preparación olímpica donde daba varias demostraciones. Lo menciono aquí porque es uno de los resultados preferidos por mí, relativos a áreas de triángulos determinados por intersecciones de cevianas dos a dos.
- Además voy a mencionar también un resultado de *Dan Pedoe* sobre área de un triángulo inscrito en otro.

Teorema de Routh (1891)

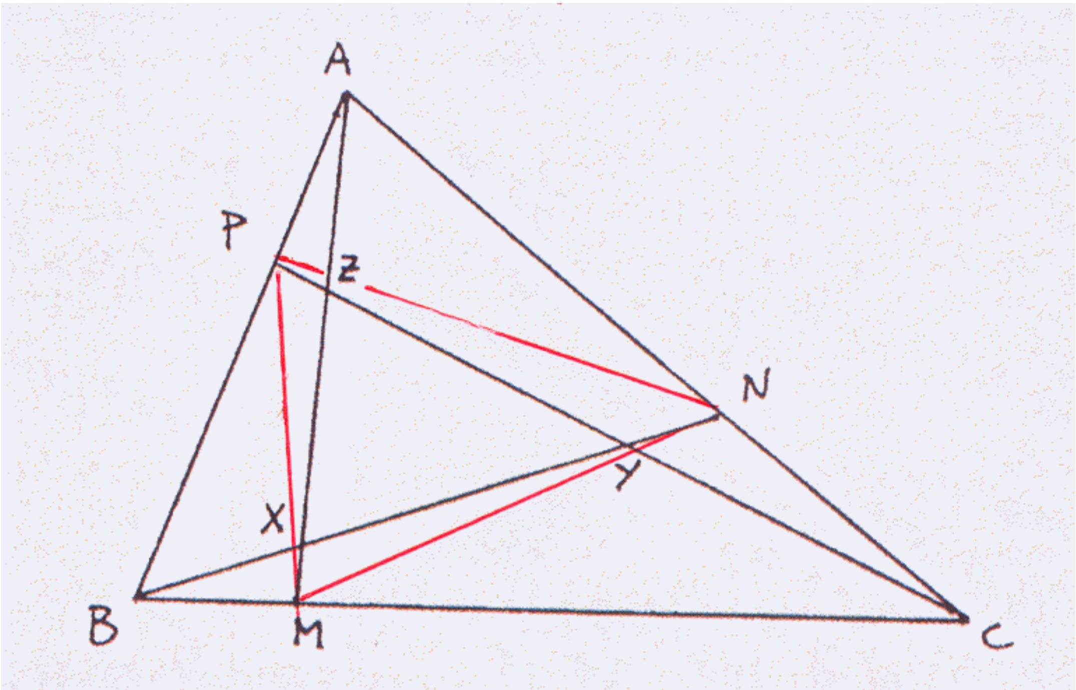
Si AM, BN y CP dividen a los lados BC, CA y AB en las razones BM/MC = r, CN/NA = s,

AP/PB = t, entonces la relación entre las áreas de los triángulos XYZ y ABC es:



$$\frac{[XYZ]}{[ABC]} = \frac{(1-rst)^2}{(1+r+rs)(1+s+st)(1+t+tr)}$$

Aquí, AM y BN se cortan en X; BN y CP se cortan en Y; y CP y AM se cortan en Z.



El teorema de Dan Pedoe

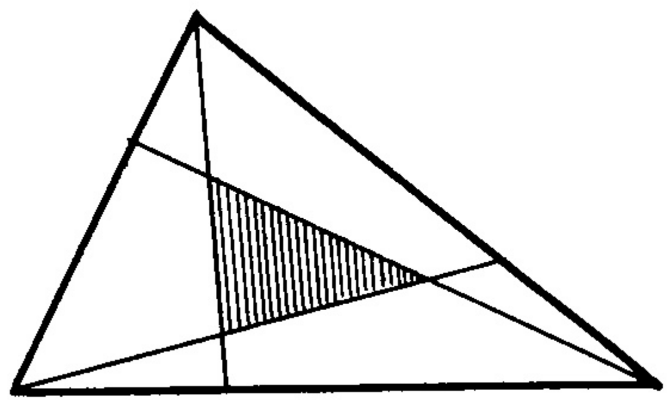
Crux Mathematicorum, 1977, pg. 191

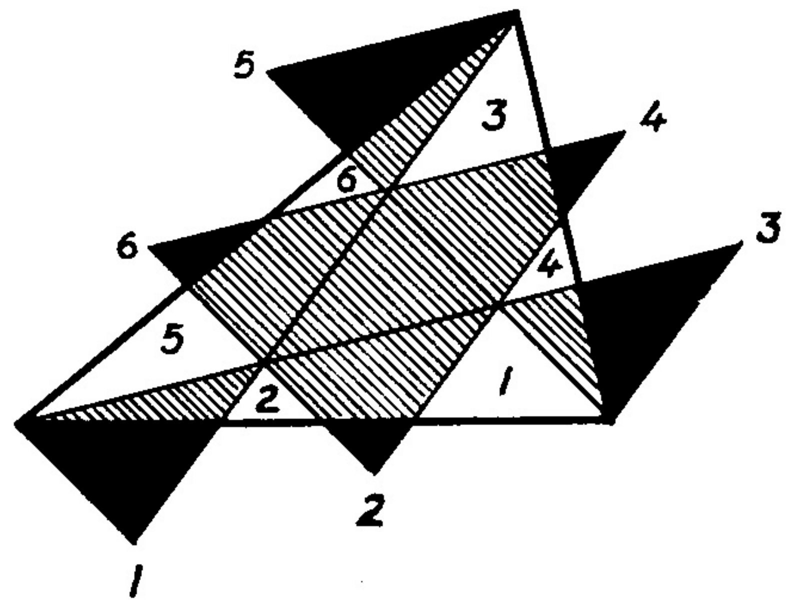
- Con las notaciones anteriores, el cociente del área del triángulo MNP y la del triángulo ABC es

$$\frac{[MNP]}{[ABC]} = \frac{1+rst}{(1+r)(1+s)(1+t)}$$

- En ambos casos, las demostraciones elementales hacen uso de propiedades conocidas de las áreas : Dos triángulos de la misma altura tienen áreas proporcionales a sus bases (para el teorema de Routh); y para el de Pedoe, dos triángulos que tienen un ángulo común tienen sus áreas en la razón de los productos de los dos lados que forman dicho ángulo.
- Es instructivo considerar el caso particular en el que r = s = t= *k*, y más particularmente todavía, el caso en que los puntos M, N y P son los puntos de trisección de los correspondientes lados. De hecho, si cada lado se divide en *n* partes iguales, entonces *k= 1/(n-1), y para n=3 el cociente de las áreas de XYZ y ABC es 1/7:*

El caso *n=3* en *Mathématiques en instantanées, de H. Steinhaus, p. 15*

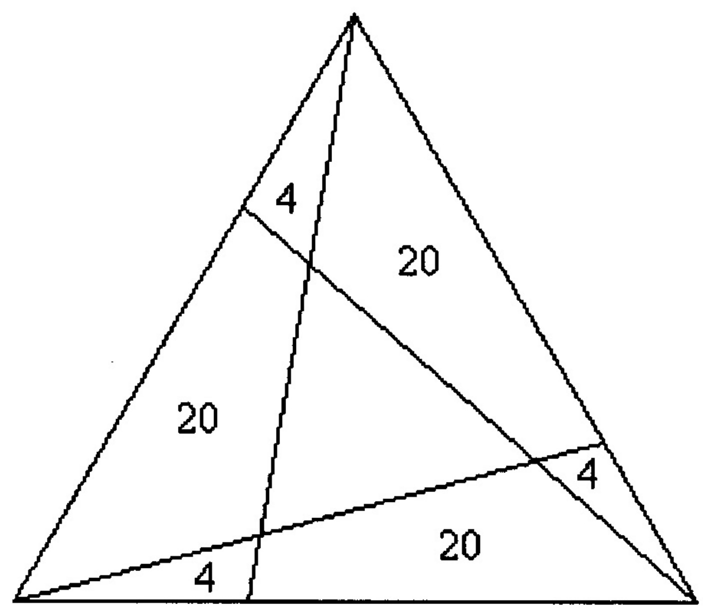




El siguiente problema, de la Olimpiada argentina de 1997, no parece fácil: reflexionad sobre él con calma

Segundo día

4. En la figura se muestra un triángulo equilátero dividido por tres rectas en siete regiones. En seis de las regiones se indica el área correspondiente. Hallar el área de la séptima región, es decir, del triangulito central.



- Hay otros resultados relacionados con el área, como el conocido como *teorema de las alfombras,* que también trata el librito de Slowik sin darle este nombre; pero me temo que el tiempo de exposición no da para más…

- **¡Muchas gracias por vuestra atención!**