Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

SISTEMAS DINÁMICOS. FRACTALES

VI SEMINARIO SOBRE ACTIVIDADES PARA ESTIMULAR EL TALENTO EN MATEMÁTICAS

Sixto Romero
ESTALMAT ANDALUCÍA
Universidad de Huelva
12, 13 abril de 2013

Al expresar qué son las Matemáticas es evidente que hay muchísimas razones para tener que enseñarlas. Además de las Matemáticas como ciencia, y de cara a la Educación, es importante no olvidar otros aspectos esenciales en las mismas.

¿Cómo crear contextos adecuado para poder enseñar matematizando? Necesitamos problemas matemáticos que tengan un contexto significativo para los estudiantes.

H. Freudenthal, 1983

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

INDICE

1. Breve Reflexión

2. Propuesta Actual de la sesión:
   *Sistemas dinámicos
   * Fractales

3. Propuesta Futura de la sesión

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

1. Breve Reflexión

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

1. Breve Reflexión

1. Breve Reflexión

A lo largo de la Historia, las Matemáticas han ocupado un lugar predominante en los currículos escolares. Han alcanzado este protagonismo no tanto por la importancia que tienen en si mismas como por razones de tipo cultural y social. *Es tal la importancia lograda que prácticamente se enseña en todas las escuelas del mundo.*

Tradicionalmente han existido dos razones básicas para ponderar las Matemáticas:

a) **Su facultad para desarrollar la capacidad de pensamiento.** Juan Luis Vives (1492-1540). ya señaló que "*son una asignatura para manifestar la agudeza de la mente*". En el momento actual se sabe que su incidencia en el desarrollo de *la capacidad de razonamiento de una persona depende del modo en que se enseñen* (Cockcroft, 1985).

b) ***Su utilidad,*** **tanto para la vida cotidiana como para el aprendizaje de otras disciplinas necesarias** ***para el desarrollo personal y profesional.***

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

¡Unos enseñando!

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

¡Muchos comprometidos desde el altruismo!

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

¡Otros destacando !

BREVE INTRODUCCION

Se podría decir que **los sistemas dinámicos son un área "joven" de las matemáticas**, aunque se remontan a Newton con sus estudios de Mecánica Celeste, y a Henri Poincaré, quien inició el estudio cualitativo de unas ecuaciones muy importantes dentro de las Matemáticas denominadas ecuaciones diferenciales. Sin embargo, fue **hace apenas unos 40 años que los sistemas dinámicos se establecieron como un área propiamente dicha**, gracias al trabajo destacado no solo de matemáticos sino que los ingenieros han tenido mucho que ver con el desarrollo de esta importante herramienta de las Matemáticas. Entre podemos citar a. Smale, V. Arnold, Lyapunov, ...

BREVE INTRODUCCION

Si tratamos de **precisar el concepto de sistemas dinámicos**, podríamos decir que se trata del **estudio de sistemas deterministas,** es decir, **consideramos situaciones que dependan de algún parámetro dado, que frecuentemente suponemos es el tiempo**, y que varían de acuerdo a leyes establecidas. De manera que **el conocimiento de la situación** en un momento dado, **nos permite reconstruir el pasado y predecir el futuro.**

Siendo un poco más formales, se podría decir que un sistema dinámico es un modo de describir el recorrido a lo largo del tiempo de todos los puntos de un espacio dado.

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

BREVE INTRODUCCION

Las actividades que estamos presentando en la actualidad se refieren a *modelos-les explicamos que es un modelo matemático- para procesos que evoluciona con el tiempo, es decir, los sistemas dinámicos discretos o ecuaciones en diferencias.* En contraste con las ecuaciones diferenciales son modelos que se adaptan bien a situaciones donde ocurren cambios en tiempos específicos en vez de continuamente.
El estudio de los sistemas dinámicos discretos implica a menudo el proceso de iteración.

ITERAR significa repetir un procedimiento muchas veces

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

2. Propuesta Actual
Sistemas Dinámicos

ACTIVIDAD 1

Relacionada con LOS BANCOS: ¡Trabajando con el concepto de DEUDA !

Imaginaros que nos encontramos en una crisis económica y algún banco ofrece prestarnos dinero-¡naturalmente no de manera gratuita!. La tasa de interés que cobra el banco es de 0,5% mensual, y nuestra capacidad de pago real es de 200 € mensuales como máximo. ¿Cuánto dinero queremos que nos preste el banco?

IDEAS PARA LA SOLUCIÓN

1. A alguien se le puede ocurrir de forma ingenua: TODO LO QUE SE PUEDA. Habréis deducido que se trata de una respuesta ingenua.
2. Analicemos este sencillo ejemplo para comprender que es lo que se nos pregunta. Llamemos D_0 a la cantidad de dinero que queremos pedir prestado al banco, y por D_n nuestra deuda después de n meses. Entonces tenemos que

* En el primer mes la deuda es $D_1 = D_0 + 0{,}005\, D_0 - 200$

* En el segundo mes la deuda es $D_2 = (1{,}005)D_1 - 200 = (1{,}005)(D_0 + 0{,}005\, D_0 - 200) - 200 = (1{,}005)^2 D_0 - 200(1{,}005) - 200 = (1{,}005)^2 D_0 - 200(1{,}005 + 1)$

3. Siguiendo el proceso, ¿Cuál es la fórmula de la deuda al cabo de 6 meses?¿Y al cabo de un año?
4. ¿Sabrías encontrar la fórmula general para **n**-meses en función de D_0?

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

ACTIVIDAD 1

Propuesta Actual
Sistemas Dinámicos

IDEAS PARA LA SOLUCIÓN

4. ¿Sabrías encontrar la fórmula general para **n**-meses en función de D_0?

$$D_n = 1{,}005^{\mathrm{n}}\mathrm{D}_0 - 200(1{,}005^{\mathrm{n}-1} + 1{,}005^{\mathrm{n}-2} + \cdots \ldots + 1$$

$$\downarrow$$

$$D_n = 1{,}005^{\mathrm{n}}\mathrm{D}_0 - \frac{200(1{,}005^{\mathrm{n}} - 1)}{1{,}005 - 1}$$

$$\downarrow$$

$$D_n = 1{,}005^{\mathrm{n}}\mathrm{D}_0 - 200\frac{(1{,}005^{\mathrm{n}} - 1)}{0{,}005}$$

$$\downarrow$$

$$D_n = 1{,}005^{\mathrm{n}}\mathrm{D}_0 - 40.000(1{,}005^{\mathrm{n}} - 1)$$

$$\downarrow$$

$$D_n = 1{,}005^{\mathrm{n}}(\mathrm{D}_0 - 40.000) + 40.000$$

IDEAS PARA LA SOLUCIÓN

$$D_n = 1{,}005^n(D_0 - 40.000) + 40.000$$

Resueltas las situaciones anteriores se les pide que razonen que al pedir una cierta cantidad de dinero se presentarán varias situaciones que van a dar lugar a los diferentes comportamientos del sistema dinámico en cuestión.

IDEAS PARA LA SOLUCIÓN

$$D_n = 1{,}005^{n}(D_0 - 40.000) + 40.000$$

- Si se pide más de 40.000 € cada vez deberá más
- Si se pide menos de 40.000 € deberá cada vez menos y llegará un momento en el que no pague nada.
- ¿Y si se pide 40.000 € ?

De esta manera llegamos al **concepto de punto fijo** o **punto de equilibrio** de un sistema dinámico, que será aquél que no varía a lo largo del tiempo que se puede calcular de la expresión

$$D_n = 1{,}005 D_n - 200 \quad \longrightarrow \quad D_n = \frac{200}{0{,}005} = 40.000$$

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

ACTIVIDAD 1

Propuesta Actual
Sistemas Dinámicos

CONCLUSIONES

Conocer las leyes que rigen el sistema, nos permite predecir el futuro. Con esta idea los a chicos han podido dar respuesta a la cuestión: **¿cuánto quieren que les preste el banco?**

Aparecen expresiones donde tenemos una sucesión de valores D_n con n entero, tales que el valor de D_n está determinado por los valores anteriores D_{n-1}, D_{n-2}, D_{n-3}, etc..., se llaman **ecuaciones en diferencias**, y dan ejemplos de **sistemas dinámicos discretos**, donde la palabra discreto significa que el parámetro *tiempo* lo consideraremos así: cada mes, cada año, cada hora, etc. Las ecuaciones en diferencias, o sistemas dinámicos discretos, más “sencillos” y tal vez más importantes, surgen mediante la iteración de funciones.

Aparecen:

a) **Los conceptos de recurrencia**
b) **Término general**
c) **Progresión geométrica**

$$S = \frac{a_1 r^n - a_1}{r-1}$$

con la fórmula de la suma y se les explica como se obtiene.

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

ACTIVIDAD 2

Propuesta Actual
Sistemas Dinámicos

Relacionada con LA EVOLUCIÓN DE UNA POBLACIÓN DE UNA ESPECIE
Modelo de CRECIMIENTO DE MALTHUS

Supongamos que queremos estudiar la evolución de la población de una determinada especie a partir de un momento, en el que había un número de individuos x_0 . Para ello, decidimos medir el tiempo, por ejemplo en años, denotamos por x_k el número de individuos en el año **k** y establecemos que el crecimiento de la población entre dos años consecutivos es 0,3 veces la población existente.

1. Establecer la relación entre x_k y x_{k-1}
2. Obtener una fórmula que permita obtener x_k en función de **k**
3. ¿Qué tipos de comportamiento tiene el modelo?

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

ACTIVIDAD 2

Propuesta Actual
Sistemas Dinámicos

Relacionada con LA EVOLUCIÓN DE UNA POBLACIÓN DE UNA ESPECIE
Modelo de CRECIMIENTO DE MALTHUS

1. Establecer la relación entre $\mathbf{x_k}$ y $\mathbf{x_{k-1}}$

$$x_1 = 0,3\mathbf{x_o} \quad + \mathbf{x_0} = 1,3\mathbf{x_0}$$

$$x_2 = 0,3\mathbf{x_1} \quad + \mathbf{x_1} = 1,3\mathbf{x_1} \; = 1,3^2\, \mathbf{x_0}$$

$$x_k = 0,3\mathbf{x_{k-1}} \quad + \mathbf{x_{k-1}} = 1,3\mathbf{x_{k-1}}$$

2. Obtener una fórmula que permita obtener $\mathbf{x_k}$ en función de **k**

$$x_k = 1,3^{\mathbf{k}}\, \mathbf{x_0}$$

3. ¿Qué tipos de comportamiento tiene el modelo?

ACTIVIDAD 2

Relacionada con LA EVOLUCIÓN DE UNA POBLACIÓN DE UNA ESPECIE
Modelo de CRECIMIENTO DE MALTHUS

3. ¿Qué tipos de comportamiento tiene el modelo?

$$x_k = 1,3^{k}\,x_0$$

* El modelo es razonable en las primeras etapas. Es decir el modelo sirve hasta donde sirve.
* La propia evolución de la especie nos permite afirmar que con los recursos que se tiene hagan que el modelo no sea válido.

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

ACTIVIDAD 2

Propuesta Actual
Sistemas Dinámicos

Relacionada con LA EVOLUCIÓN DE UNA POBLACIÓN DE UNA ESPECIE
Modelo de CRECIMIENTO DE MALTHUS

1. ¿Te parece que es razonable el modelo?¿Cuándo lo sería?
2. ¿Cómo sería el modelo si el crecimiento es proporcional a la población existente con constante **d**?
3. ¿Serviría el modelo para estudiar una población que se fuera extinguiendo, de modo que el decrecimiento de la población fuera proporcional a la población existente?

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

ACTIVIDAD 2

2. Propuesta Actual
Sistemas Dinámicos

Relacionada con LA EVOLUCIÓN DE UNA POBLACIÓN DE UNA ESPECIE
Modelo de CRECIMIENTO DE MALTHUS

Un cultivo de bacterias se supone que sigue el crecimiento exponencial. Si inicialmente hay 1000 bacterias , y al cabo de 1 hora hay 1250, ¿cuántas habrá al cabo de 4 horas?
Mediante una tabla, averigua cuánto tiempo transcurrirá hasta que haya 5.000 bacterias.

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

ACTIVIDAD 2

2. Propuesta Actual
Sistemas Dinámicos

Relacionada con LA EVOLUCIÓN DE UNA POBLACIÓN DE UNA ESPECIE
Modelo de CRECIMIENTO DE MALTHUS

$$x_k = \mathrm{d}^k \mathrm{x}_0$$

$$x_0 = 1000 \qquad 1250 = \mathrm{d}^1 1000 \qquad d = 1,25$$

$$x_1 = 1250$$

Por lo tanto el modelo es $x_k = 1,25^k\, 1000$

Y al cabo de 4 horas habrá $x_4 = 1,25^4\, 1000$

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

ACTIVIDAD 2

2. Propuesta Actual
Sistemas Dinámicos

Relacionada con LA EVOLUCIÓN DE UNA POBLACIÓN DE UNA ESPECIE
Modelo de CRECIMIENTO DE MALTHUS

$$x_k = 1,25^{k}\ 1000$$

Para obtener mediante la tabla el tiempo que ha de transcurrir para que haya 5.000 bacterias :

K=1	1,25
K=2	1,5625
K=3	1,9531
K=7	4,7683
K=8	5,9604

$$5.000 = 1,25^{k}1000 \longrightarrow \quad 5 = 1,25^{k}$$

$$n = \frac{\log 1,25}{\log 5}$$

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

ACTIVIDAD 3

2. Propuesta Actual
Sistemas Dinámicos

Relacionada con UN MODELO DE ECOLOGÍA

Supongamos que tenemos en España 1250 individuos de una especie protegida de ave. Los expertos creen que la población de aves existente disminuye un 7% cada año por causas naturales o por los cazadores furtivos. Hay además un programa de reproducción en cautividad de donde salen 5 individuos cada año.

1. Escribe la relación de recurrencia que relaciona la población existente en el año ***k***, x_k, con la que había el año *k-1*, x_{k-1}.
2. Determina una fórmula que permita obtener directamente x_k en función de ***k***.

Se establece que una especie está en peligro de extinción si el número de sus individuos es menor que 100.

3. Si las condiciones no varían, ¿llegará esta especie a estar en peligro de extinción?

Visualización Gráfica de la Actividad 3

Observa que las cuestiones que hemos resuelto, pueden abordarse de la siguiente manera.

Se toma un sistema cartesiano y para cada punto (x,y), x es el número de individuos que hay en el instante $k-1$ e y es el número de individuos que hay en el instante k.

Considera, por ejemplo, el sistema dinámico dado por

$$x_k = 0{,}93\ x_{k-1} + 5$$

de la Actividad 3.

1. Representa la curva o dinámica de crecimiento.
2. Dada una cantidad x de aves en este año, representa gráficamente la cantidad que habrá el año que viene y dentro de 2 años.
3. ¿Qué número de aves puede haber este año para que el año que viene haya más? ¿Qué número de aves puede haber este año para que el año que viene haya menos?

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

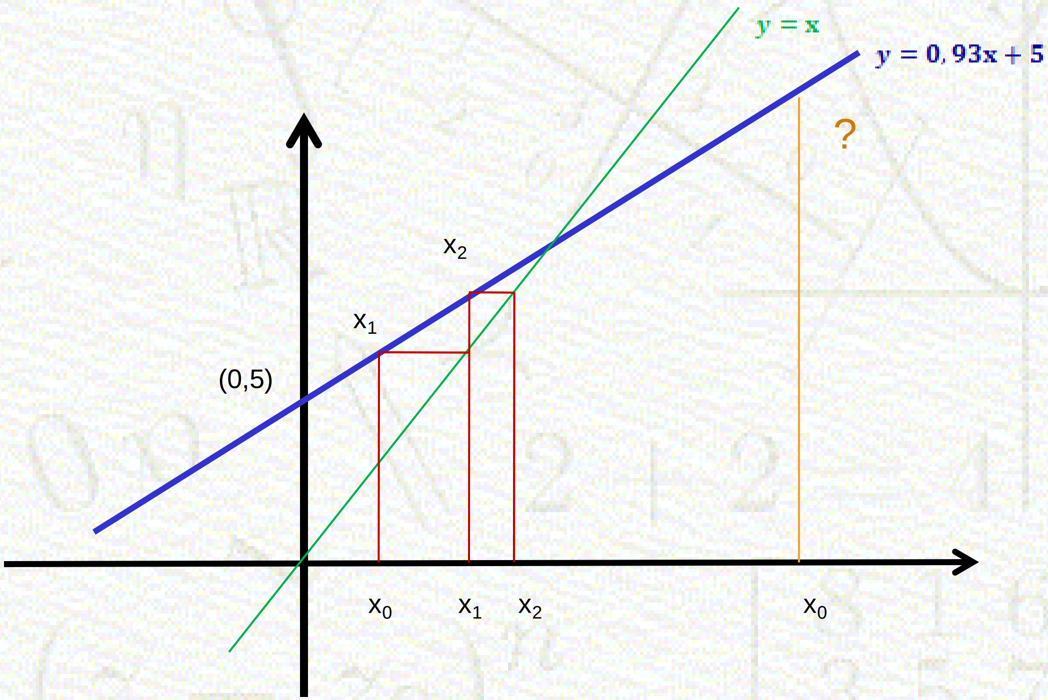
ACTIVIDAD 4

2. Propuesta Actual
Sistemas Dinámicos

Visualización Gráfica de la Actividad 3

1. Representa la curva o dinámica de crecimiento.

Un forma de representar es partir de un plano donde el eje OX es $\mathbf{x_{k-1}}$ y el eje OY es $\mathbf{x_k}$
$\boldsymbol{x_k}$ = 0,93 $\boldsymbol{x_{k-1}}$ +5 y tomamos como asistente la recta y=x



Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

ACTIVIDAD 4

2. Propuesta Actual
Sistemas Dinámicos

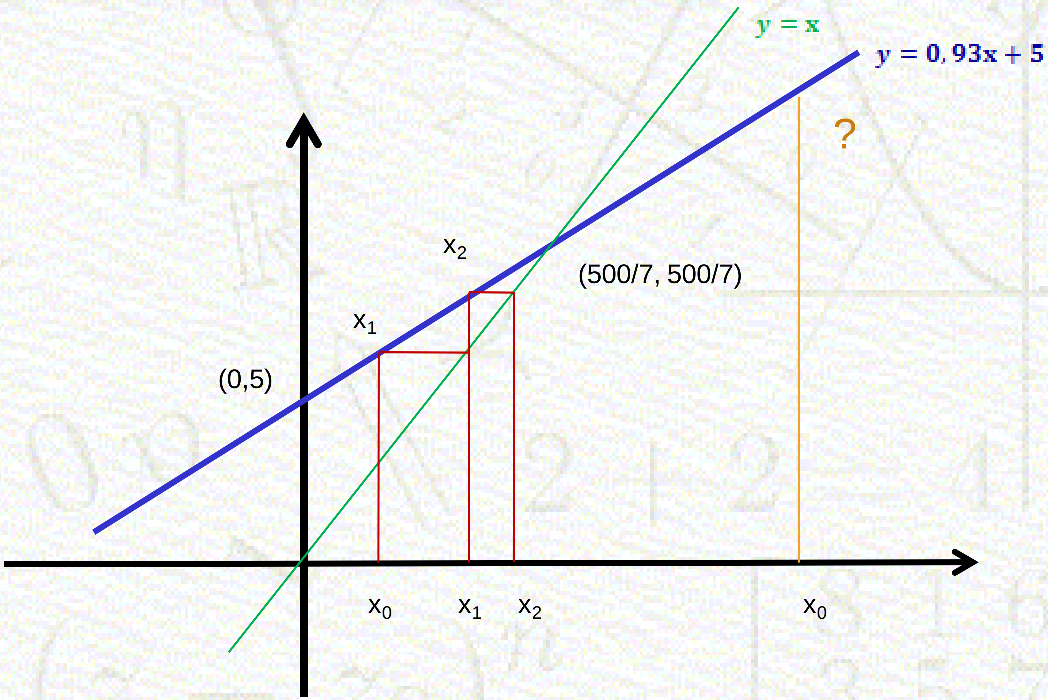
Visualización Gráfica de la Actividad 3

¿El sistema hacia dónde llega con el tiempo cualquiera que sea el punto de arranque?

El sistema tiene el comportamiento de tener un **punto de equilibrio atractivo** cualquiera que es la intersección de las dos rectas

$y = 0{,}93x + 5$

$y = x$



Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

ACTIVIDAD 4

2. Propuesta actual
Sistemas Dinámicos

Visualización Gráfica de la Actividad 3

*Un equilibrio se llama **estable** si la población se vuelve a acercar a él si sufre una pequeña variación inicial, y se llama **inestable** si la población se aleja de él si sufre una pequeña variación inicial.*

6. ¿Cómo es el punto de equilibrio del sistema dinámico dado por

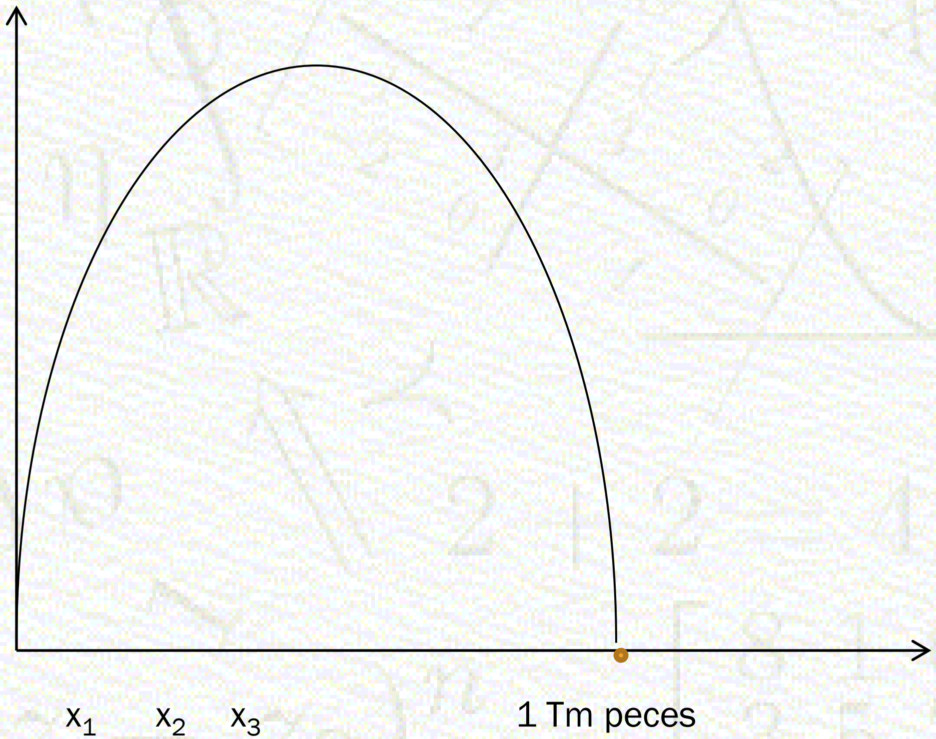
$$x_k = 1{,}005\ x_{k-1} - 200$$

de la Actividad 1?

ACTIVIDAD 5

Relacionada con UN MODELO DE CRECIMIENTO DE PECES

Supongamos que una especie de peces se reproduce según la dinámica de crecimiento de la figura adjunta.
Admitamos que la curva es una función cuadrática cuyo coeficiente principal es -3.



Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

ACTIVIDAD 5

2. Propuesta Actual
Sistemas Dinámicos

Relacionada con UN MODELO DE CRECIMIENTO DE PECES

1. Escribe la dinámica de crecimiento correspondiente.
2. ¿Cuál es la cantidad de peces que da la cantidad máxima para el próximo año?
3. ¿Cuántos peces debe haber para que haya la misma cantidad el año que viene?
4. ¿Cuántos peces puede haber para que aumente la cantidad el año que viene?
5. ¿Cuántos peces debe haber para que disminuya la población el año que viene?
6. ¿Cuáles son los puntos de equilibrio o puntos fijos del sistema anterior

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

BREVE INTRODUCCION

En la naturaleza hay abundantes ejemplos de **formas pertenecientes a la geometría euclidiana** (hexágonos, cubos, tetraedros, cuadrados, triángulos, etc.) pero su vasta diversidad también produce **objetos que eluden la descripción euclidiana.** En esos casos **los fractales nos proporcionan un mejor medio de explicación.**

La geometría euclidiana es muy útil para la descripción de objetos tales como cristales o colmenas, pero no encontramos en ella objetos que puedan describir las palomitas de maíz, los productos horneados, la corteza de un árbol, las nubes, ciertas raíces o las líneas costeras. **Los *fractales* permiten modelizar, por ejemplo, objetos tales como una hoja de helecho o un copo de nieve.** Con la incorporación del azar en la programación es posible, por medio de la computadora, obtener fractales que describen los flujos de lava y el terreno montañoso.

BREVE INTRODUCCION

a) Cuando viajamos en avión tenemos la oportunidad de observar las distintas *formas que la naturaleza y el hombre* han generado sobre la piel de la superficie de la Tierra.

b) También si nos subimos a un mirador notamos cómo *la naturaleza y los humanos "conciben" de diferentes maneras* los infinitos elementos que conforman el paisaje. ¿Dónde está la diferencia?

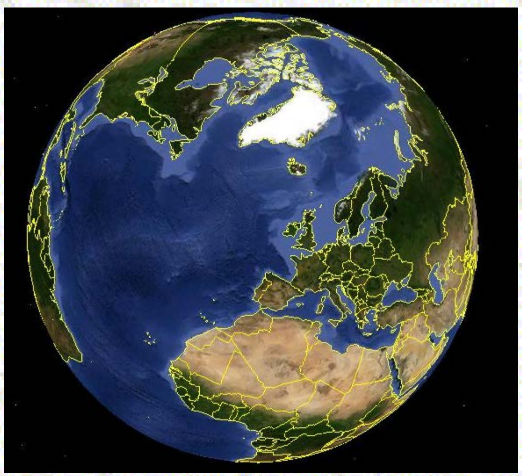
¿Dónde está la diferencia?

Hay que encontrarla en la geometría. Por un lado la geometría euclidiana trazada como si un tiralínea se tratara por las máquinas creadas por el hombre, y por otro, la geometría de la curva. Podemos decir que es una **lucha de titanes entre dos estilos distintos.**

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

Formas dibujadas

a) Por la Tierra

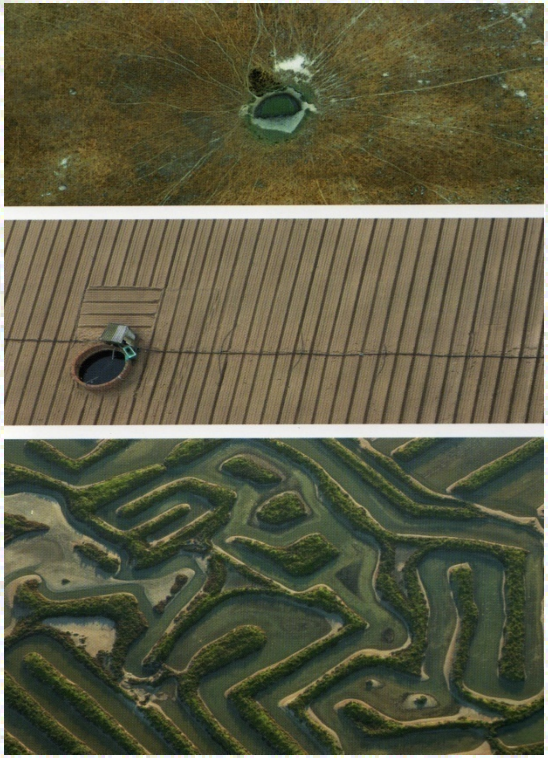


Formas dibujadas

a) Por la Vida

Formas dibujadas

a) Por el Hombre



Necesidad de medir: el origen de la geometría euclidiana

¿Por qué hemos roto el patrón natural que venía dibujando la piel de la tierra desde su formación hace cuatro mil años?

Una sola respuesta: para medir.

La geometría euclidiana es uno de los hitos del pensamiento deductivo que basándose en cinco axiomas crea un sistema de descripción del mundo que colmó las necesidades de las ciencias de la naturaleza, de la historia natural hasta bien entrado el siglo XIX.

BREVE INTRODUCCION

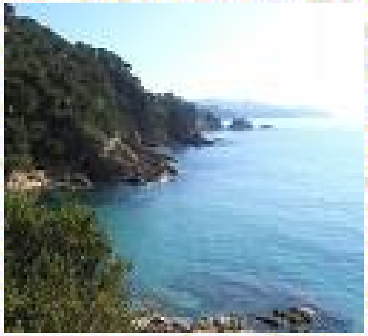
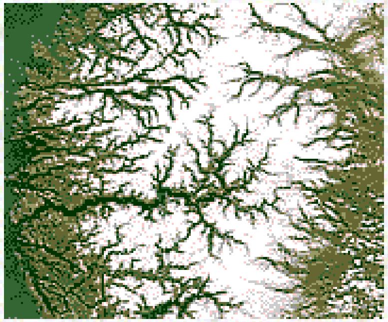
El pintor Paul Cezanne: *"Todo en la Naturaleza puede verse en términos de conos, cilindros y esferas".* Se trata de una sentencia programática en referencia a su estilo pictórico y nos viene al pelo como descripción de una visión euclidiana de la Naturaleza.

BREVE INTRODUCCION

La réplica la pondría Mandelbrot al contestar: "*Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, las cortezas de los árboles no son suaves y nada, excepto la luz, viaja en línea recta*". Si el mensaje de Mandelbrot es que la Naturaleza responde mejor a otro tipo de descripción, sería conveniente que pudiésemos comprobarlo más allá de la simple intuición.

BREVE INTRODUCCION

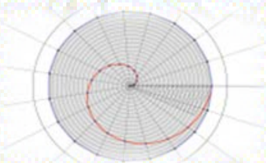


ACTIVIDAD 6

TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

Los sistemas dinámicos que hemos considerado se basan en la *iteración*, es decir en la repetición de un proceso (un cálculo) que permite obtener cada término a partir de otros calculados previamente. **Un fractal es una figura obtenida mediante la iteración de un proceso geométrico sencillo que da lugar a una estructura que puede ser extraordinariamente complicada.** Como ejemplo, vamos a construir el que se llama *Triángulo de Sierpinski.*



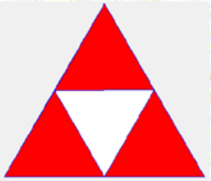
Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

ACTIVIDAD 6

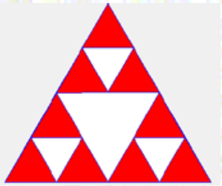
TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

Se toma un triángulo equilátero de lado 1.

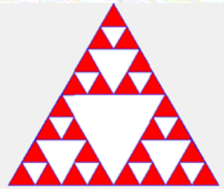
En la primera iteración, se unen los puntos medios de cada lado, se forma un triángulo equilátero que se elimina.



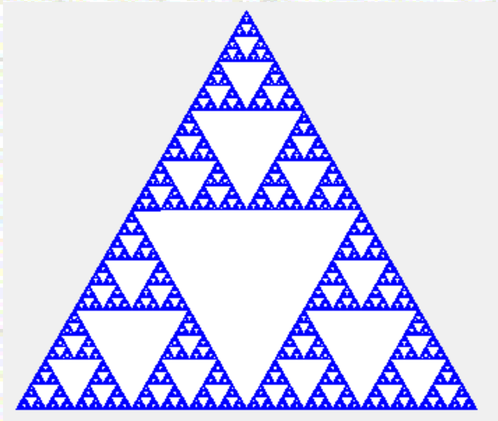
En la segunda iteración, se unen los puntos medios de los lados de los triángulos que quedaban en la primera iteración y se eliminan los triángulos que se forman.



En la tercera iteración, se unen los puntos medios de los lados de los triángulos que quedaban en la segunda iteración y se eliminan los triángulos que se forman.



Y así sucesivamente.



Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

ACTIVIDAD 6

TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

¡ Observa que cada parte reproduce el conjunto total !

1. Si A_n es el área de la figura originada en la iteración n, calcula $A_1, A_2, A_3, \ldots$
2. Determina A_n en función de n.
3. ¿A qué cantidad se va acercando el área del *triángulo de Sierpinski* cuando aumenta n?
4. Si P_n es el perímetro de la figura originada en la iteración n, calcula $P_1, P_2, P_3, \ldots$
5. Determina P_n en función de n.
6. ¿A qué cantidad se va acercando el perímetro del *Triángulo de Sierpinski* cuando aumenta n?

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

ACTIVIDAD 6

2. Propuesta Actual
Fractales

TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

1. Si A_n es el área de la figura originada en la iteración n, calcula A_1, A_2, A_3

$A_1 = A$ $\quad A_2 = (\frac{3}{4})A$ $\quad A_3 = (\frac{3}{4})^2 A$

2. Determina A_n en función de *n*

$$A_n = (\frac{3}{4})^{n-1} A$$

3. ¿A qué cantidad se va acercando el área del *triángulo de Sierpinski* cuando aumenta *n*?

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} A \quad \rightarrow \quad 0$$

ACTIVIDAD 6

TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

4. Si P_n es el perímetro de la figura originada en la iteración n, calcula P_1, P_2, P_3

$$\boldsymbol{P_1} = P \qquad \boldsymbol{P_2} = \left(\frac{3}{2}\right)P \qquad \boldsymbol{P_3} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 P$$

5. Determina P_n en función de n

$$\boldsymbol{P_n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} P$$

6. ¿A qué cantidad se va acercando el perímetro del *Triángulo de Sierpinski* cuando aumenta n?

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} P \to \infty$$

CURVA DE KOCH

Construimos de modo similar la llamada Curva de Koch .
Se parte de un segmento.

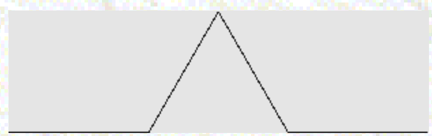
Para la primera iteración, se construye una curva del modo siguiente: Se divide el segmento en tres partes iguales, se quita la parte central y se sustituye ésta por dos segmentos que tengan la misma longitud que el que has quitado.

A continuación se itera el proceso en cada uno de los segmentos que van apareciendo.

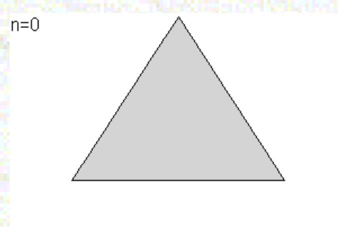
ACTIVIDAD 7

CURVA DE KOCH

1.) Dibuja las tres primeras iteraciones de la curva de Koch.
2.) Determina las longitudes de las curvas que van apareciendo. ¿A qué valor se acerca la longitud de la curva de Koch?



Se llama **“copo de nieve”** el fractal que resulta de construir una curva de Koch sobre cada uno de los lados de un triángulo equilátero. ¿Te imaginas la forma que tiene?



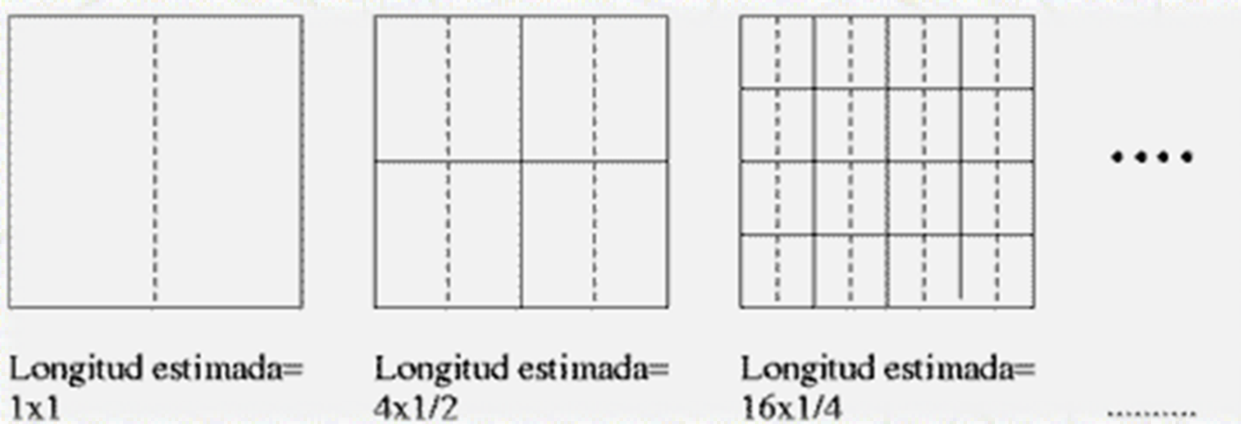
Midiendo longitudes y volúmenes

Una forma de medir la longitud de una curva es aproximarla a la longitud de una serie de pequeñas rectas que la recubren. A ese procedimiento se llama *rectificación*. Cuanto más pequeñas sean las rectas escogidas para el recubrimiento, más exacta será nuestra medida.

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

GEOMETRÍA FRACTAL

Pero... **¿qué ocurre si intentamos medir la "longitud total" de un cuadrado?** No su perímetro, sino la longitud del cuadrado por este método de rectificación. **¿Tiene, siquiera, sentido tal pregunta?**



Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

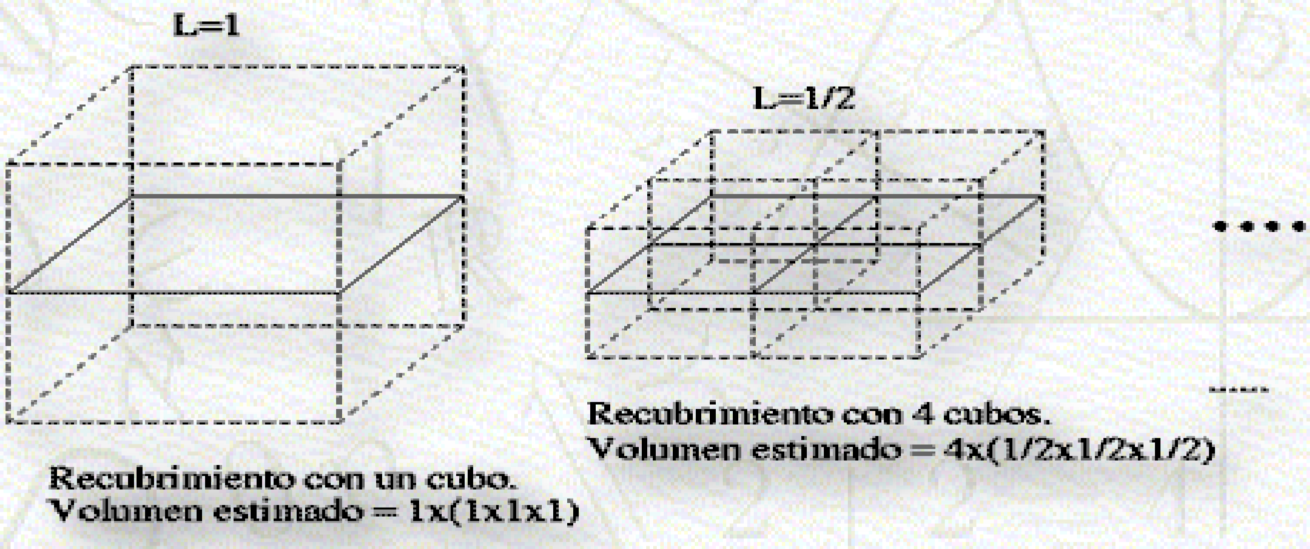
GEOMETRÍA FRACTAL

Cuando hayamos repetido esta tediosa, pero expeditiva operación infinitas veces, podremos decir que *hemos recubierto el cuadrado con líneas.* No existirá ni un solo punto por el que no pase una línea, ni por ninguno de ellos pasará a la vez más de una. Para hallar matemáticamente el valor de la longitud de la línea que recubre al cuadrado empleamos el límite:

$$L = \lim_{n \to \infty} 2^{2n} \left(\frac{1}{2^n} \right)^n = \lim_{n \to \infty} 2^n = \infty$$

GEOMETRÍA FRACTAL

Pero... **¿qué ocurre si intentamos medir el volumen de un objeto geométrico?**



GEOMETRÍA FRACTAL

a) Nuestra primera aproximación será de nuevo un recubrimiento burdo: una sola caja cúbica que contiene al cuadrado como sección transversal. Así, $V_1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

b) Dividamos el cuadrado en cuatro pedazos idénticos y sobre cada uno repitamos el proceso anterior: recubrámoslos con cubos de arista correspondiente. Ahora tenemos 4 cubos de volumen $1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$. La nueva aproximación será $V_2 = 4 \cdot (1/2)^3 = 1/2$.

c) Si volvemos a dividir: $V_3 = 16 \cdot (1/4)^3 = 1/4$.

$$V_4 = 64 \cdot (1/8)^3 = 1/8.$$

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

GEOMETRÍA FRACTAL

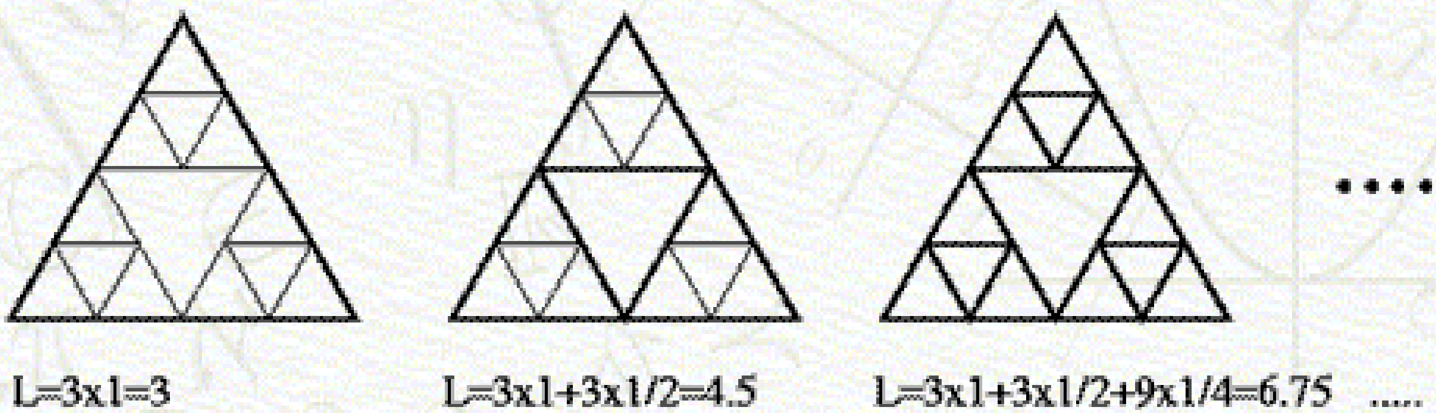
$$V = \lim_{n\to\infty} 2^{2n}\left(\frac{1}{2^n}\right)^3 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$$

¡De modo que la longitud de un cuadrado es infinita y el volumen es cero!

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

GEOMETRÍA FRACTAL

Pero… **¿qué ocurre si intentamos medir el perímetro del TRIÁNGULO DE SIERPINSKI?**

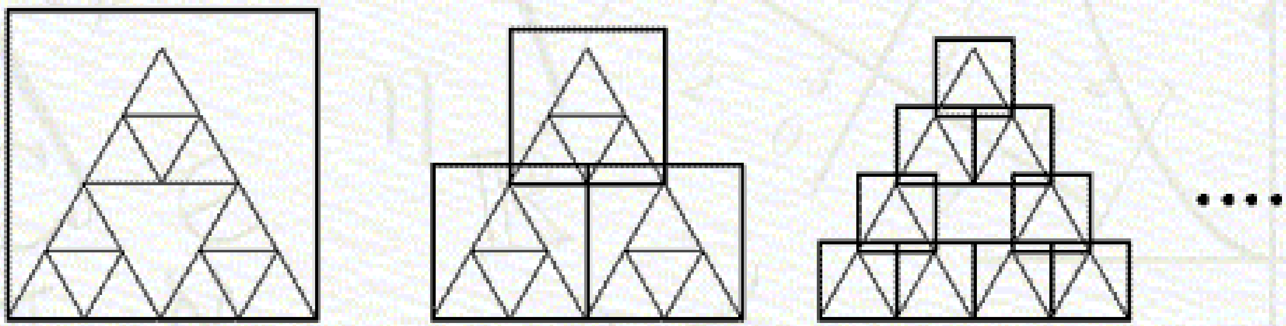


$$L_{\infty} = 3 + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\tfrac{3}{2}\right)^{i}$$

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

GEOMETRÍA FRACTAL

Pero… **¿qué ocurre si intentamos medir el área de un triángulo por aproximación?**



S=1x1 S=3x(1/2x1/2)=0.75 S=3x3x(1/4x1/4)=0.5625 …..

$$S_\infty = lim_{n\to\infty}\left[3^n \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^2\right] = lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

GEOMETRÍA FRACTAL

¿Sorpresa?

El triángulo de Sierpinski es un objeto geométrico de infinita longitud, aunque se encuentra en una región finita del plano, cosa que implica dimensión mayor que uno. Pero a la vez tiene área nula, que indica dimensión menor que 2.

¿Pero entonces, qué dimensión tiene?

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

GEOMETRÍA FRACTAL

Definición de autosimilaridad

Sea un segmento de longitud L=1. Podemos recubrirlo, por ejemplo, con:

2 segmentos de tamaño 1/2: N=2, R=1/2; $(1/2)^{-1}=2$
4 segmentos de tamaño 1/4: N=4, R=1/4; $(1/4^{)-1=}4$
8 segmentos de tamaño 1/8: N=8, R=1/8; $(1/8^{)-1=}8$

Observa que el exponente -1 cambiado de signo coincide con la dimensión 1 de una recta.

GEOMETRÍA FRACTAL

La relación

$$N = R^{-D}$$

nos determina la **dimensión D del objeto geométrico**.

GEOMETRÍA FRACTAL

¿Qué exponente D encontramos al aplicar este método al triángulo de Sierpinski?

3 triángulos de lado 1/2:N=3, R=1/2; $(1/2)^{-D} = 3$
9 triángulos de lado 1/4:N=9, R=1/4; $(1/4)^{-D} = 9$
27 triángulos de lado 1/8:N=27, R=1/8; $(1/8)^{-D} =27$
……………………………………………………
3^n triángulos de lado $1/2^n$:N=3^n , R=$1/2^n$ $(1/2^n)^{-D} = 3^n$

GEOMETRÍA FRACTAL

¿Qué exponente D encontramos al aplicar este método al Triángulo de Sierpinski?

$$(1/2^n)^{-D} = 3^n$$

Despejando *D:*

$$D \ln 2^n = \ln 3^n \quad \Rightarrow \quad D = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1{,}58496$$

GEOMETRÍA FRACTAL

Definición de autosimilaridad

Así la dimensión de autosimilaridad D de un objeto, hecho de N copias exactas a él mismo y reducidas en un factor R, es:

$$\mathbf{D} = -\frac{\ln N}{\ln R}$$

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

GEOMETRÍA FRACTAL

a) Para la línea: $$\mathbf{D = -\frac{\ln 2}{\mathit{ln}(\frac{1}{2})} = 1}$$

b) Para el cuadrado: $$\mathbf{D = -\frac{\ln 4}{\mathit{ln}(\frac{1}{2})} = 2}$$

c) Para el cubo: $$\mathbf{D = -\frac{\ln 8}{\mathit{ln}(\frac{1}{2})} = 3}$$

d) Para el T.de Sierpinski: $$\mathbf{D = -\frac{\mathit{ln}3}{\mathit{ln}(\frac{1}{2})} = 1,589496}$$

GEOMETRÍA FRACTAL

Obtención de fractales

Observa el monigote inicial

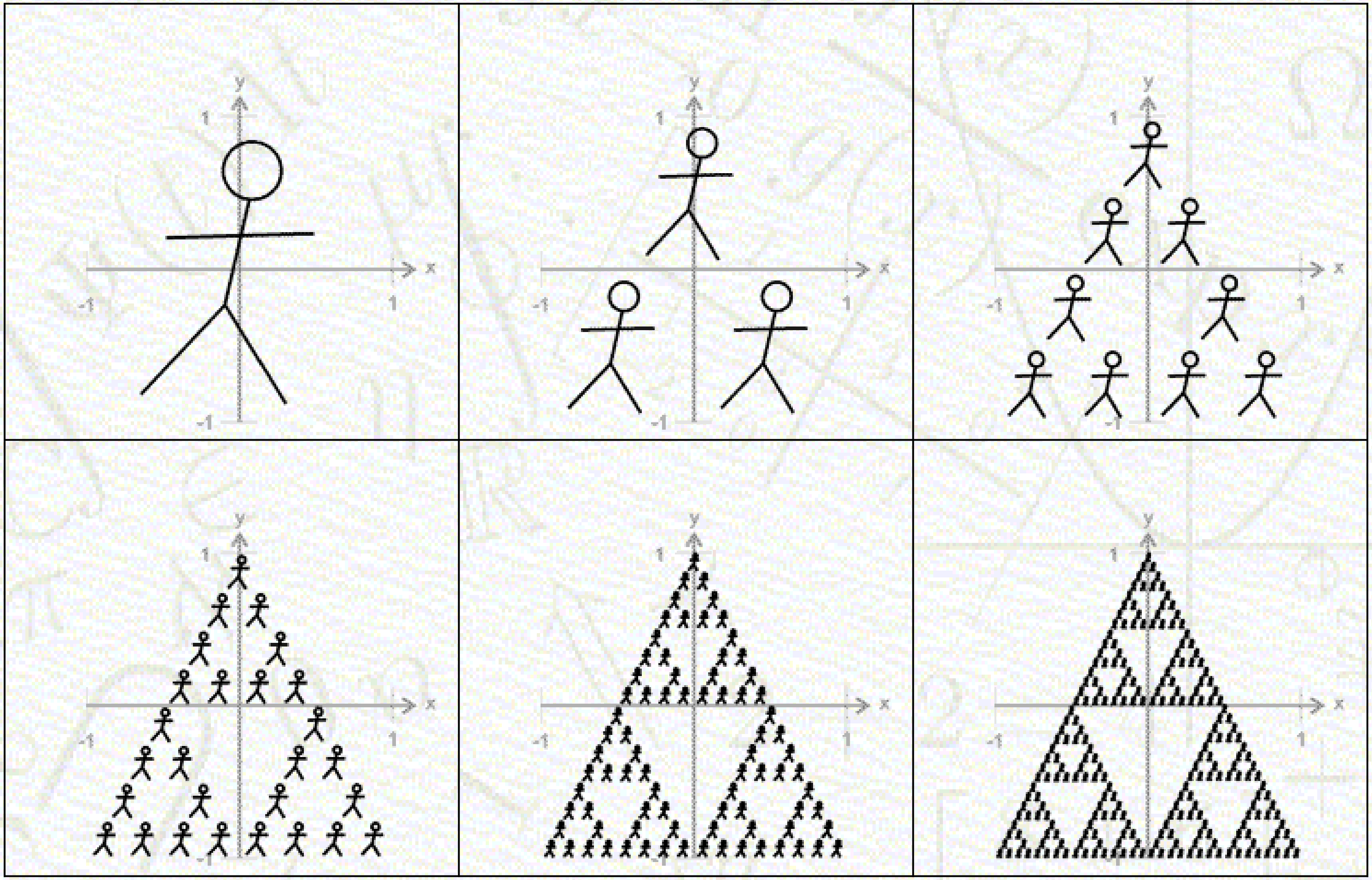
Llamémoslo ***semilla inicial***. Sobre él vamos a ejercer una serie de transformaciones. Creamos tres copias reducidas a 1/3 y las situamos como se observa en la segunda celda. Repetimos el procedimiento con cada nuevo monigote. Observa las sucesivas aproximaciones a ...

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

GEOMETRÍA FRACTAL

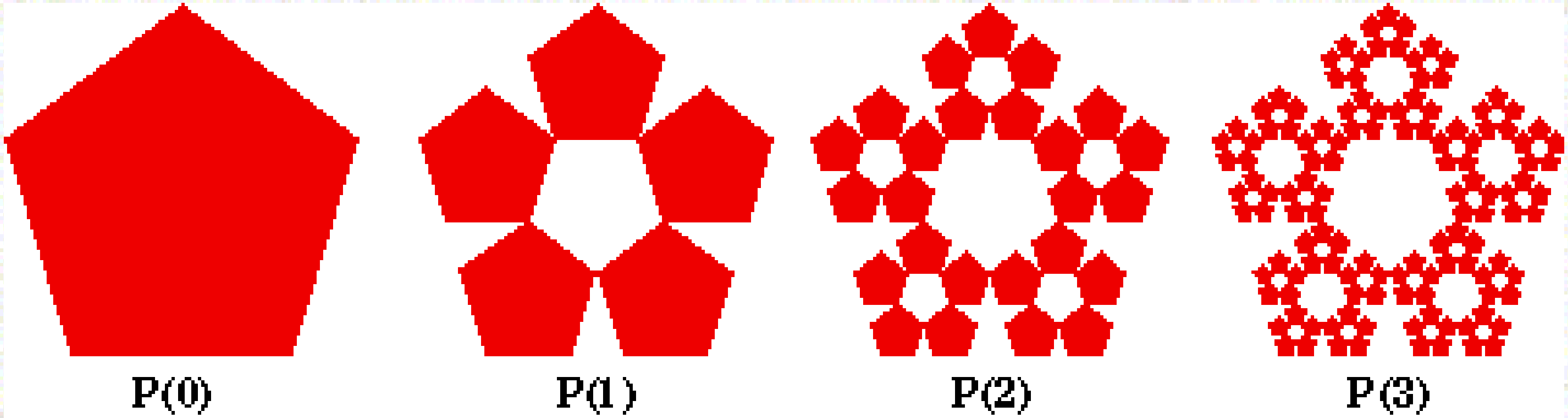
3. Propuesta Futura
Fractales

Obtención de Fractales



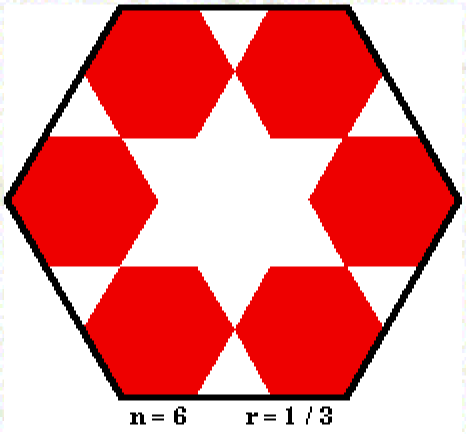
Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

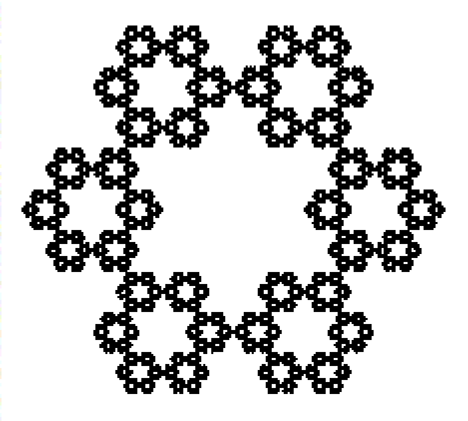
Pentágono de Sierpinski



Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

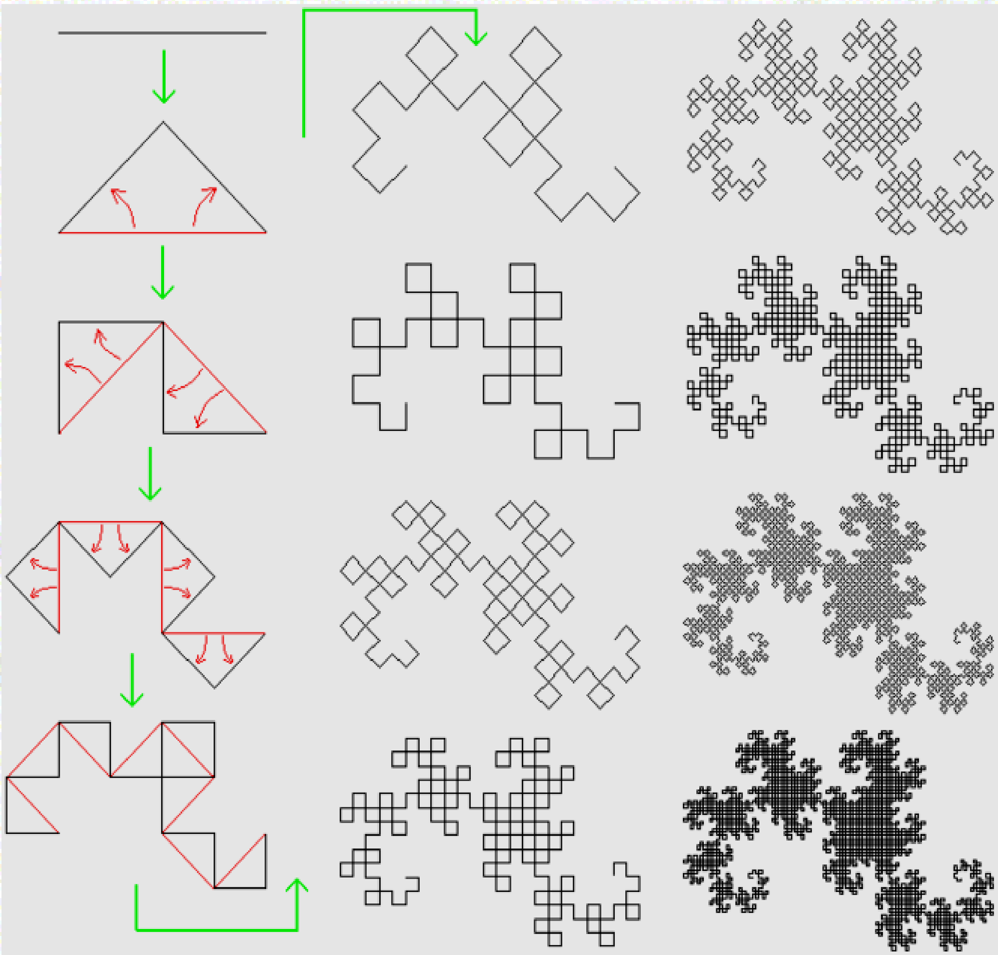
Exágono de Sierpinski





Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

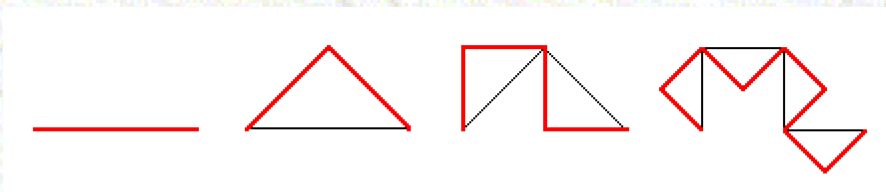
GEOMETRÍA FRACTAL

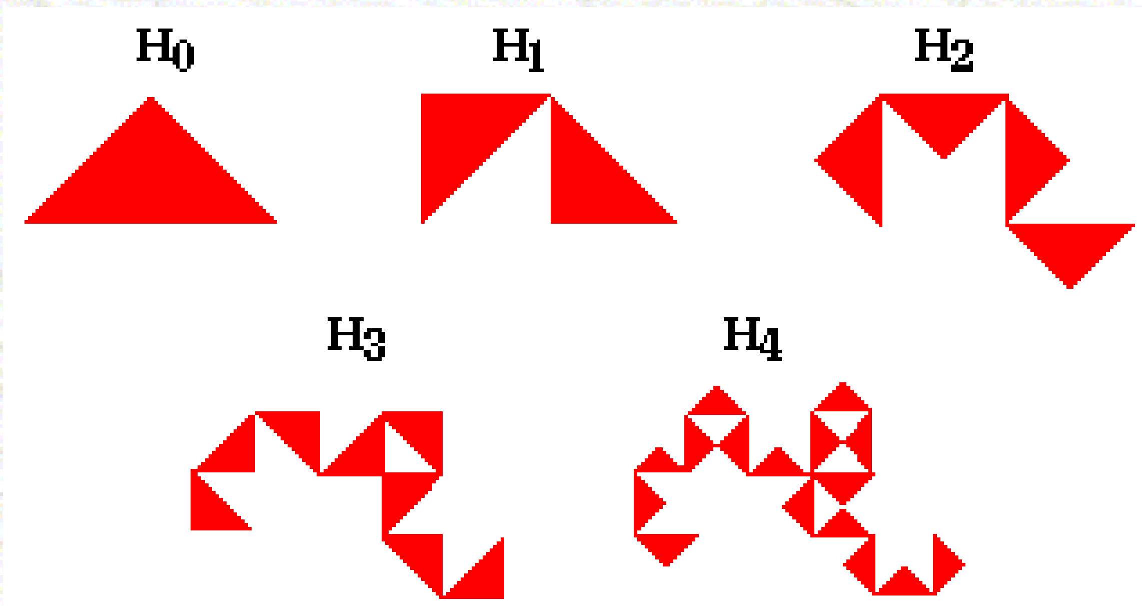


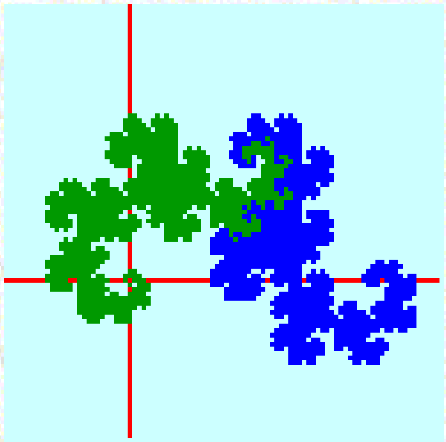
Se construye siguiendo los siguientes pasos:
A partir de un segmento, se construye el triángulo rectángulo e isósceles, como lo muestra las dos primeras figuras. Luego se borra el segmento inicial.

Dragón

Dragón







Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

Diferentes Tipos de Fractales

Lineales

Se crean a partir de Un generador -Un algoritmo de repetición

Ejemplo: Conjunto de Cantor yTriágulo de Sierpinski

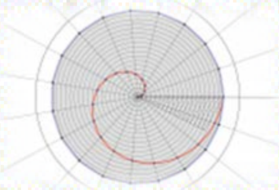
Complejos

Se crean a partir de Iteraciones en el Plano Complejo

Ejemplo: Conjunto deMandelbrot, Conjunto deJulia

Caóticos

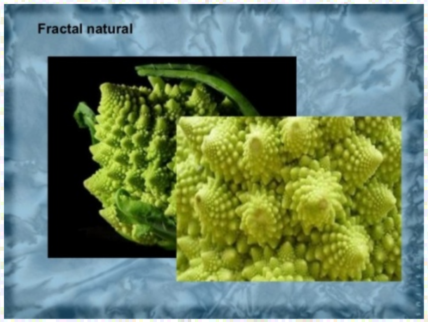
Se generan a partir de sistemas deEcuaciones Diferenciales
Ejemplo: Atractor de Lorentz-
Modela el Clima Meteorológico

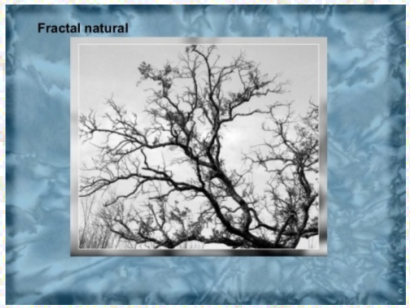


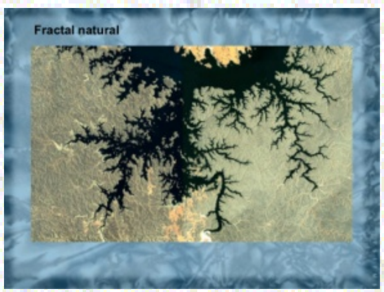
Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

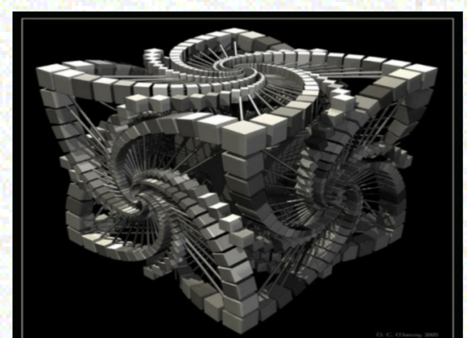
3. Propuesta Futura
Fractales

http://www.slideshare.net/AntonioJessPanCollantes/fractales-ao-10-11

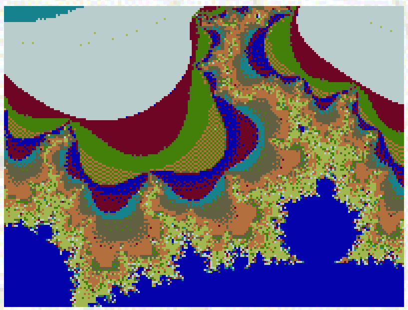
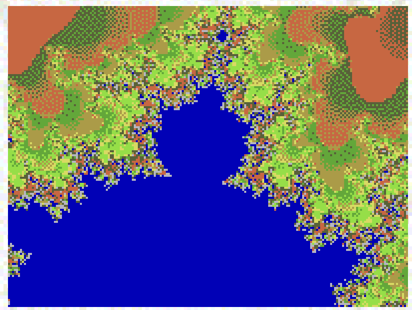
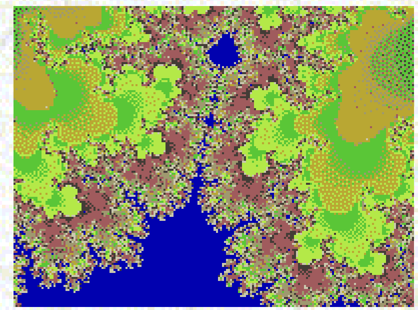
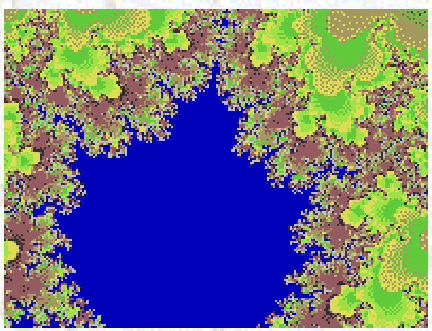
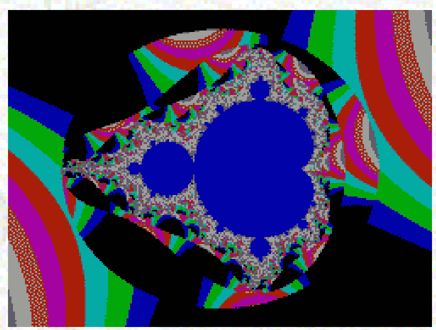
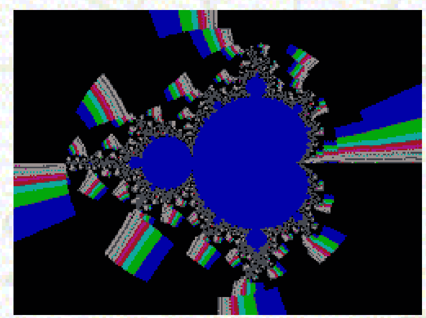








Ejemplos de Fractales

PROFUNDIZAR EN LOS SISTEMAS DINÁMICOS

No se han estudiado los modelos de población cuya razón de cambio es continua EN PROFUNDIDAD. Es una hipótesis razonable para especies que se reproducen muy rápido con respecto a la escala de tiempo que estamos considerando. Sin embargo, para algunas especies todos los nacimientos ocurren en la primavera y la mayor parte de las muertes durante el invierno; por consiguiente, la hipótesis de un cambio continuo de la población no es válida. Por eso se ha considerado el tiempo como discreto. Si medimos la población una vez en verano, entonces tendremos una estimación exacta de la población durante todo el año.

Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

PROFUNDIZAR EN LOS SISTEMAS DINÁMICOS

1. Ampliar el estudio a la ECUACIÓN LOGÍSTICA DISCRETA

$$P_{n+1}=k\, P_n\, (1-P_n)$$

donde P_n representa el porcentaje o fracción de la población máxima viva en la generación **n**

K constante de proporcionalidad que determina la razón de crecimiento

2. Tener en cuenta los factores que se han despreciado y que pueden afectar a P_n (efectos de depredadores, enfermedades cíclicas, suministro de comida, etc…)

PROFUNDIZAR EN LOS SISTEMAS DINÁMICOS

3. Predicciones del modelo

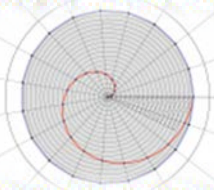
4. Localización de las órbitas. Profundizar en la localización de los puntos fijos y periódicos:

   * Iteración Gráfica

   * Puntos atractores y repulsores

   * Bifurcaciones

5. Estudio del comportamiento caótico: procedimientos cualitativos y numéricos



Castillo de la Mota
Medina del Campo
(Valladolid)

¡Muchas gracias por la atención!