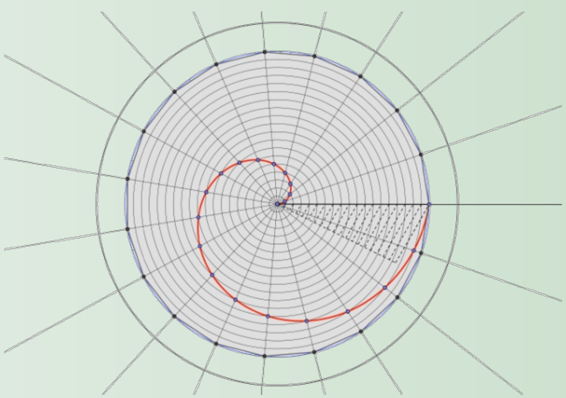
VI Seminario sobre Actividades para Estimular el Talento Precoz en Matemáticas

# Jugando con grado 3


Carmen Barrio

ESTALMAT CANTABRIA

ESTALMAT CANTABRIA

## Observaciones

Alumnos veteranos.
Sesión realizada este año.

## Introducción

Resolución de ecuaciones en ESO:

En el aula, se modelan situaciones, se plantean y resuelven ecuaciones polinómicas de primero y segundo grado.

En poquísimos casos se presentan ecuaciones polinómicas de grado tres o más.

Mucho menos se hace mención de posibles métodos de solución ni de los aspectos históricos que dieron origen a los procesos tratados en las matemáticas escolares actuales.

ESTALMAT CANTABRIA

Cómo resolver situaciones como las citadas a continuación:

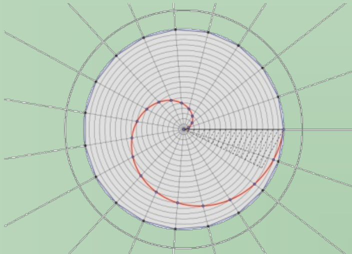
**¿ Cuáles deberán ser las dimensiones de una caja de base cuadrada con tapa, que tenga una capacidad de 100 $m^3$ y que se pueda construir con una lámina de 20 $m^2$ ?**

**¿ Cuáles son y cómo podemos determinar los puntos de intersección de la parábola y la hipérbola ?**

**¿ Hasta dónde se debe sembrar un árbol de 10 m de alto de tal manera que la parte que quede al aire sea el cubo de la que quede en tierra ?**

**¿ Cuál es la tasa de interés que se tiene que aplicar a un artículo de 400 euros, si se quiere pagar en cuatro meses a razón de 120 euros/mes?**

¿Planteamiento? ¿Solución?

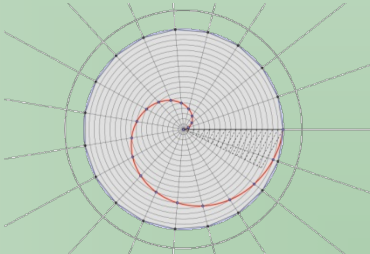


ESTALMAT CANTABRIA

# PERSPECTIVA HISTÓRICA

En las primeras civilizaciones avanzadas, como la egipcia, la babilónica o la griega, existían algunos problemas que no hacían cuestión a una cantidad fija, tal y como se recoge en algún papiro egipcio o tablilla babilónica pudiéndose considerar este tipo de problemas como antecedente muy remoto de las ecuaciones.

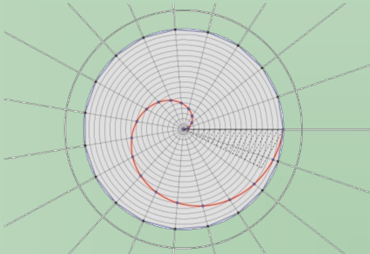
La primera civilización que trató las ecuaciones de primer grado de forma más rigurosa, fue la civilización árabe, que se utilizaría posteriormente en Europa, tras su traducción.

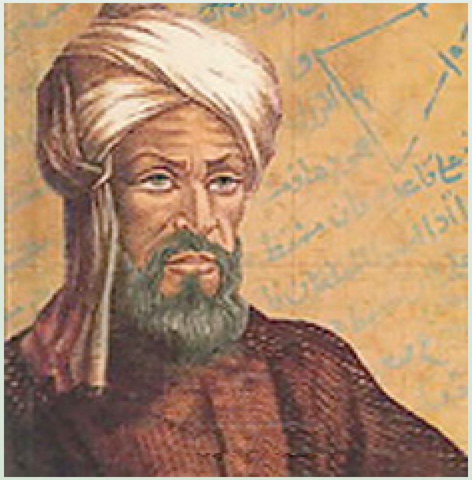


La dificultad se produjo al intentar resolver ecuaciones
de grado mayor que 2,
a lo cual dedicaron bastantes esfuerzos
los matemáticos italianos del siglo XVI.

En esta época, la invención de los símbolos algebraicos fue gradual,
y se asocia al matemático Viète,
gran parte la notación simbólica asociada a las ecuaciones.

Con la contribución de muchos matemáticos a lo largo de la historia,
como Lagrange, Euler, Abel, Gauss, Galois, etc.,
se ha avanzado en el estudio y análisis de ecuaciones,
así como su relación con el álgebra, otras ramas matemáticas y científicas



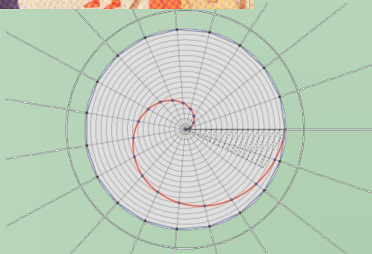


## *al-Khawarizmi*

Abu Jafar Muhammad ibn Musa al-Khawarizmi,
Nació alrededor del 780 d.C.


Procedencia: Khawarizmi
(este del mar Caspio ,
Asia Central soviética)

Año 820,
tras adquirir una reputación de científico dotado en Merv,
capital de provincias orientales del califato abasí,
fue invitado por el califa *Al-Mamun* a trasladarse a Bagdad,
donde fue nombrado, primero astrónomo y después,
jefe de la biblioteca de la ***Casa de la Sabiduría***.

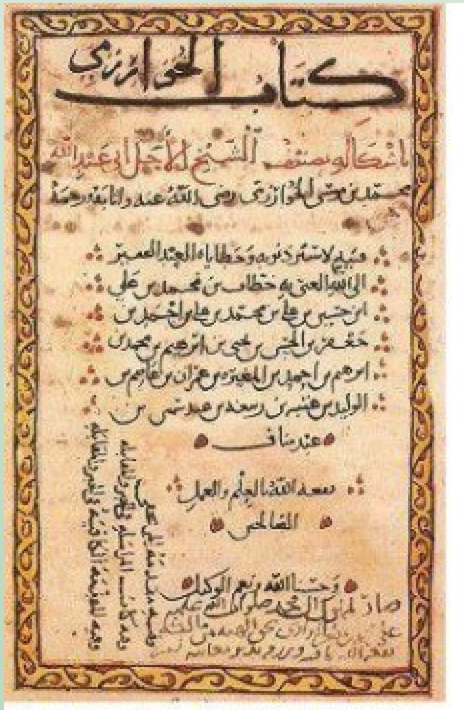


ESTALMAT CANTABRIA

Escribió mas de media docena de obras astronómicas y matemáticas.

Tablas astronómicas y tratados sobre el astrolabio y el reloj de sol,

Dos libros sobre ***aritmética y álgebra.***

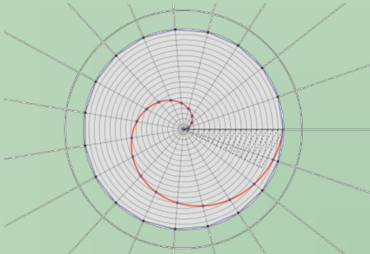


Aritmética (en latín es *De numero Indorum ):*

- reglas para el cálculo numérico
  (basadas en los algoritmos indios)
- sistema de numeración utilizado por los indios

En Europa, a finales de la Edad Media,
atribuyeron al autor árabe
la paternidad de la numeración utilizada.

Y así el nuevo sistema de notación vino a ser conocido como
"el de al-Khawarizmi" y , a través de deformaciones del nombre
en la traducción y en la trasmisión, simplemente como ***"algorismi"***.



ESTALMAT CANTABRIA

***Hisab al-abr wa'l muqqabala***

"***ciencia de la trasposición y la reducción***"

"al-jabr" → "***álgebra***" → ciencia de las ecuaciones

Significados:

- Restauración: sumar términos iguales a los dos miembros de una ecuación para eliminar cantidades negativas
(restaurar una cantidad que se resta de un miembro para sumarla al otro)

Ejemplo: $2x + 5 = 8 – 3x \rightarrow 5x + 5= 8$

- Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un cierto número para eliminar las fracciones.

Ejemplo: $(9/4)x + 1/8 = 3 + (5/8)x \rightarrow 18x + 1 = 24 + 15x$

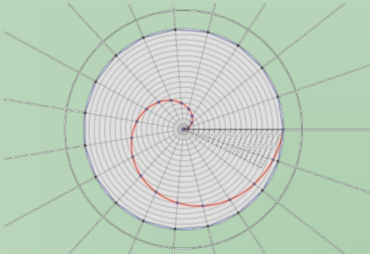
ESTALMAT CANTABRIA

Al-Khwarizmi da una clasificación de diferentes tipos de cuadráticas (aunque sólo ejemplos numéricos)

Estos tipos surgen al no considerar resultados menores o iguales que cero.

Las ecuaciones se construyen con tres tipos de cantidades: raíces, cuadrados de raíces y números; esto es, x, $x^2$ y números.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **I** | Cuadrados igualados a raíces | $2x^2=28x$ | **IV** | Cuadrados y raíces igualados a números | $x^2 + 10x = 39$ |
| **II** | Cuadrados igualados a números. | $3x^2=12$ | **V** | Cuadrados y números igualados a raíces | $x^2 + 21 = 10x$ |
| **III** | Raíces igualadas a números. | $15x=3$ | **VI** | Raíces y números igualados a cuadrados | $3x + 4 = x^2$ |



*Resuelve la ecuación del tipo IV;*
*el cuadrado de la cosa más diez veces ella resulta treinta y nueve.*

El mismo resuelve el enunciado de la forma siguiente, que en su lenguaje es

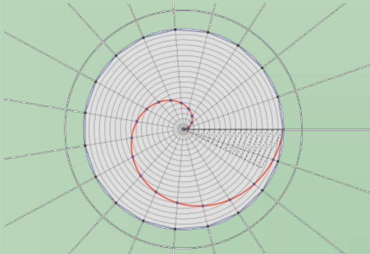
| | |
|---|---|
| **Dividir por dos números el "número" de raíces** | $\frac{10}{2}=5$ |
| **Multiplicar esto por sí mismo** | 5·5=25 |
| **Sumar esto a 39** | 25+39=64 |
| **Extraer la raíz cuadrada a esto** | $\sqrt{64}$ =8 |
| **Restar a 8 el resultado del paso 1** | 8-5=3 |

ESTALMAT CANTABRIA

*Imaginar una ecuación de cada tipo enunciado por Al-Khwarizmi.*
*Utilizar la explicación de Al-Khwarizmi para resolver la ecuación propuesta.*
*Plantearla y resolverla en notación moderna.*

Tras dar soluciones numéricas para los seis tipos de ecuaciones, prosigue:
“Hemos dicho bastante, por lo que se refiere a números,
acerca de los seis tipos de ecuación.
Ahora es necesario demostrar geométricamente la verdad de los mismos problemas que hemos explicado en números”

(estas demostraciones geométricas pueden seguirse fácilmente [Mo]).



***Omar Khayyam***

***Nicolo Tartaglia***

***Girolamo Cardano***

Otros: Ludovico Ferrari, Rafael Bombelli, Viète, Harriot, Tschirnhaus,
Euler, Bezout, Descartes, Leibniz, Niels Henrik Abel, Evariste Galois …

## RESOLUCION DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Aunque ya conocemos la fórmula, veamos como se deduce la “fórmula” de la ecuación de segundo grado.
Vamos a ver cómo obtenerla siguiendo los pasos siguientes:

*A partir de $ax^2+bx+c=0$, determina una ecuación equivalente (con las mismas soluciones) tal que $a=1$.*

*¿Qué le falta a $x^2+mx$ para poder expresarlo como un cuadrado, de la forma $(x+h)^2$? Usándolo, reduce la expresión del problema anterior.*

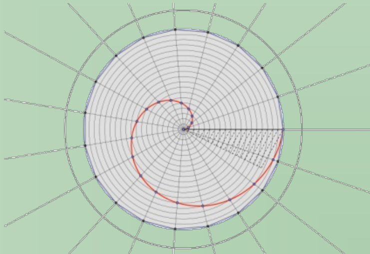
*Tomando raíces cuadradas, ¿cuál es la solución de la ecuación anterior? ¿y de la ecuación original?*

## RESOLUCION DE LA ECUACIÓN DE TERCER GRADO

Veamos cómo resolver ecuaciones de grado tres.
Empezamos por las más simples al estilo de Al-Khuarizmi y Khayyan
a partir de los casos más fáciles.

*Resuelve las siguiente ecuaciones:* $x^3 = 0$ , $x^3 - 27 = 0$ , $x^3 + 2x^2 = 0$ , $2x^3 - 32x = 0$ .

Estas ecuaciones han sido fáciles.
Pero no siempre las ecuaciones tienen este aspecto.
Diversas argucias matemáticas más el ingenio de algunos,
y teniendo en cuenta la analogía con la resolución de la ecuación de segundo grado
permitió resolver otros tipos de ecuaciones.



Intenta transformar la ecuación $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ en una de la forma $x^3 + px + q = 0$ (cambia el valor de x por x+a y sustituye).

Una vez realizado ese cambio las expresiones de p y q resultan:

$$p = s - \frac{r^2}{3} \qquad \text{y} \qquad q = \frac{2}{27}r^3 - \frac{1}{3}rs + t$$

y la resolución de la ecuación queda como sigue.
Se necesita una segunda “idea feliz” que es un nuevo cambio de variable, en esta ocasión hay que tomar x=u+v, de lo que resulta

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

desarrollando:

$$u^3 + v^3 + 3vu^2 + 3uv^2 + pu + pv + q = 0$$

reagrupando:

$$(u^3 + v^3 + q) + (u+v)(3uv + p) = 0$$

Las variables u y v son solución de esta ecuación y de la ecuación

$$(u+v)^3 - u^3 - v^3 + 3vu(u+v) = 0$$

por tanto, se satisface que $(3uv + p) = 0$ . Con lo que

$$u^3 + v^3 = -q \qquad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

y denominando $u^3 = U$ y $v^3 = V$ , éstas se pueden poner como:

$$U + V = -q \quad \text{y} \quad UV = -\frac{p^3}{27}$$

que son solución de la ecuación de segundo grado:

$$X^2 + qX + \frac{-p^3}{27} = 0$$

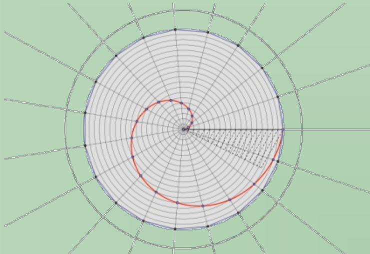
Resuelve la ecuación anterior de grado 2 e intenta calcular una solución de la ecuación en términos de p y q.

Las tres soluciones de la ecuación $x^3 + px + q = 0$ son:

$$x_1 = \left( \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \right)^{1/3} + \left( \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \right)^{1/3}$$

$$x_2 = \frac{(-1 + i\sqrt{3})}{2} \left( \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \right)^{1/3} + \frac{(-1 - i\sqrt{3})}{2} \left( \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \right)^{1/3}$$

$$x_3 = \frac{(-1 - i\sqrt{3})}{2} \left( \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \right)^{1/3} + \frac{(-1 + i\sqrt{3})}{2} \left( \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \right)^{1/3}$$



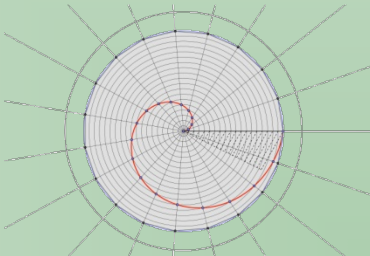
Aunque en las expresiones anteriores aparece la unidad imaginaria,
puede ocurrir que las tres soluciones sean reales
por cancelación de términos semejantes.

*Resuelve las siguientes ecuaciones enunciadas en las competiciones del renacimiento*

*- Determina por donde debe ser cortado un árbol de 12 varas de altura de tal manera que la parte que quede en tierra sea la raíz cúbica de la parte superior cortada.*

*- Encuentra un número que se convierte en 6 cuando se le suma su raíz cúbica.*

*- Un hombre vende un zafiro por 500 ducados, obteniendo así un beneficio* de la *raíz cúbica del precio que pagó por él. ¿A cuánto asciende el beneficio?*



Para acabar vamos a vestirnos del renacimiento y actuar

*Vamos a dividirnos en grupos.*

*Cada grupo tiene que inventar uno o varios problemas tipo renacentista, al estilo de los de Cardano y Tartaglia y proponerlos al resto de grupos.*

*Ganará el grupo que más problemas sea capaz de resolver.*

ESTALMAT CANTABRIA

# OTRAS FORMAS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Los alumnos de ESO están habituados a la resolución analítica de las ecuaciones. Existen otras herramientas que pueden ayudar a calcular raíces de un polinomio aunque no sean del todo rigurosas.

*Resuelve gráficamente las ecuaciones*:

$$x^2+bx+c=0$$

$$y=x^2$$
$$y=-bx-c$$

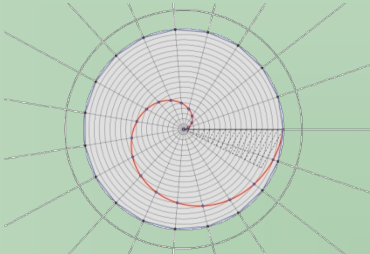
$$x^2-5x+6=0$$
$$x^2-2x+5=0$$
$$x^2-4x+4=0$$

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

$$ax^2+bx+c=-d/x$$

$$y=ax^2+bx+c$$
$$y=-d/x$$

$$x^3-6x^2+7x-6=0$$
$$x^3-3x^2+7x-5=0$$

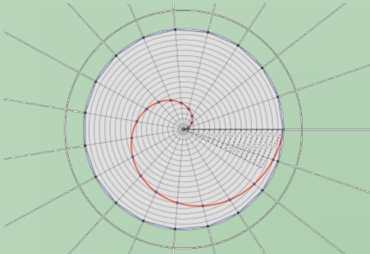


Es posible conseguir soluciones aproximadas de las ecuaciones de grado tres o mayor mediante una herramienta ofimática, como es una hoja de cálculo. Esto se puede llevar a cabo de diferentes formas, entre las que se encuentran las siguientes:

- Construcción de una tabla de datos con rango suficiente para abarcar las soluciones, de manera que se puedan observar los puntos de cortes con los ejes al realizar la representación gráfica del polinomio asociado a la ecuación.

- Resolución de la ecuación mediante la herramienta de Excel “buscar objetivo”, *Goal seek.*

- Solución de la ecuación con uso del complemento *Solver*.

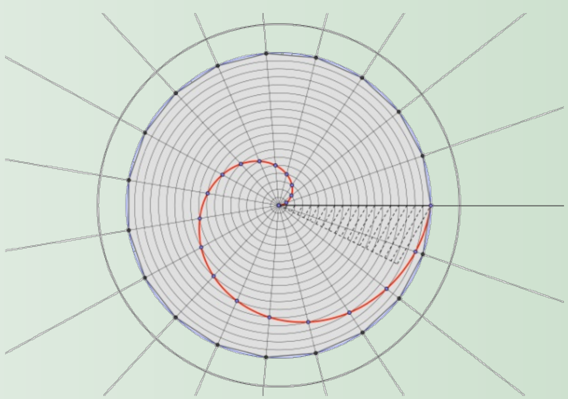


VI Seminario sobre Actividades para Estimular el Talento Precoz en Matemáticas

# Raíces y Coeficientes de polinomios

Daniel Sadornil

ESTALMAT CANTABRIA



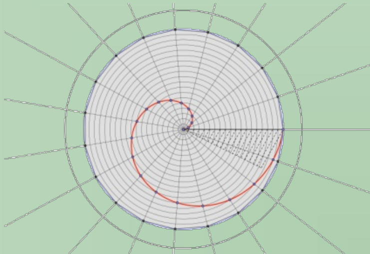
ESTALMAT CANTABRIA

## Observaciones

- Sesión de futuro.
- Alumnos veteranos.

## Introducción:

- Manipulación de expresiones algebraicas (varias indeterminadas).
- ¿Por  qué las soluciones de un polinomio son las que son y por qué un polinomio con raíces concretas es el que es?
- Resolución de ecuaciones polinómicas con características especiales (en sus raíces).
- Construcción de polinomios simétricos.
- Determinación de las sumas de las potencias de las raíces de un polinomio.
- Ecuaciones simétricas, recíprocas  (λ – recíprocas)



ESTALMAT CANTABRIA

Expresiones *“diferentes o distintas”* a simple vista con raíces iguales si las igualamos a 0:

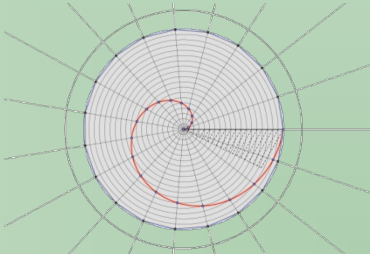
$2x^2 - 11x + 5$ $\qquad 2x^2 - 11x + 5$ $\qquad -4x^2 + 22x - 10$

$\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 5)$ $\qquad (2x - 1) \cdot (\frac{x}{2} - \frac{5}{2})$ $\qquad x^3 - 5x^2 - (x - 5) \cdot (x - 1)^2$

Lo importante son las expresiones “simplificadas”.

Manipulación de expresiones algebraicas

Sumas, productos, simplificación, potencias, identidades notables, varias variables…



## Ecuaciones que surgen de problemas:

- (Papiro de Rhind): Una cantidad y su cuarta parte suman 15. ¿Cuál es la cantidad?

- (Papiro de Berlín) Un cuadrado tiene una superficie de 100 unidades cuadradas y es igual a la suma de las superficies de dos cuadrados, el lado de uno de los cuales es igual a la mitad más la cuarta parte del lado del otro. ¿Cuánto miden los lados de los cuadrados?

- Aritmética de Diofanto: Encuentra dos números tales que su suma sea 7 y la suma de sus cuadrados sea 25.

- Aritmética de Diofanto: Encuentra dos números tales que la suma sea 8 y la suma de sus cubos 224.

- Busca dos números tales que su suma sea 2 y su producto -15.

Surgen en algunos ecuaciones de segundo grado.

¿ Y sus coeficientes?

- Desarrollo y manipulación $f=a(X-r_1)(X-r_2)$.

$f=aX^2+bX+c$ a,b,c ??? En función de $r_1,r_2$

- En el mismo sentido pero con grado tres, $(X-r_1)(X-r_2)(X-r_3)$.

  Comprobación en el ejemplo $X^3+2X^2-5X-6$.

- Más productos, más grado.

Vía un ejemplo concreto, vía expresión general

$f(X) =a_n(X-r_1) (X-r_2)\ldots (X-r_n)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+ a_{n-2}X^{n-2} + \ldots+ a_1X+= a_0$

ESTALMAT CANTABRIA

# FÓRMULAS DE CARDANO - VIETA

$a_{n-1}=-a_n(r_1+r_2+\ldots+r_n)$
$a_{n-2}=a_n(r_1r_2+r_1r_3+\ldots\ r_1r_n+r_2r_3+\ldots+r_{n-1}r_n)$
$a_{n-3}=-a_n(r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+\ldots\ +r_{n-2}r_{n-1}r_n)$
…
$a_1=(-1)^{n-1}a_n(r_1r_2\cdots r_{n-2}r_{n-1}+r_1r_2\cdots r_{n-2}r_n+\ldots+r_2r_3\cdots r_{n-1}r_n)$
$a_0=(-1)^n a_n\, r_1r_2\cdots r_{n-1}r_n$

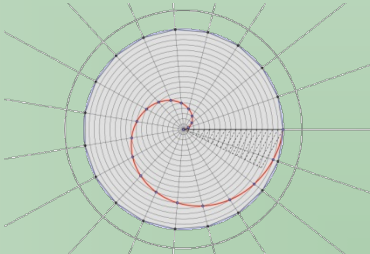
ESTALMAT CANTABRIA

Determinación de polinomios con características "*especiales*" en sus raíces:

- Sean los polinomios $f(X)= X^3+AX^2+BX+C$, $g(X)=3X^2+2AX+B$ con A,B,C números a determinar. A partir de las relaciones anteriores, determinar los posibles polinomios f, g tales que si $r_1$,$r_2$ y $r_3$ son las tres raíces de f, las de g son $(r_1+ r_2)/2$, $(r_2+ r_3)/2$.

- Determinar el valor de k para que el polinomio $f(X) = X^4–X^3+kX^2+6X-4$ tenga dos raíces $r_1$,$r_2$ cuyo producto sea 2. Para dicho valor de k calcular las raíces $r_1$,$r_2$ y resolver la ecuación $f(x) = 0$.

- Resolver la ecuación $X^3-9X^2+23X-15=0$ sabiendo que sus raíces están en progresión aritmética.



ESTALMAT CANTABRIA

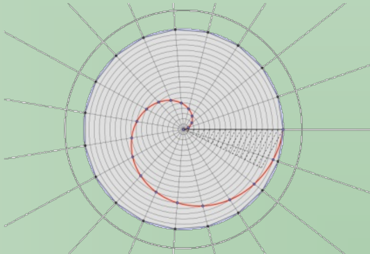
Polinomios simétricos elementales:

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ indeterminadas (variables)

$$S_r(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_r}$$

Reescritura Cardano – Vieta

$$a_{n-i} = (-1)^i a_n S_i(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, r_n), \quad 0 \leq i \leq n-1$$



ESTALMAT CANTABRIA

# POLINOMIOS SIMÉTRICOS

$$x^2+y^2+z^2 \qquad xyz^2+xy^2z+x^2yz \qquad x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$$

$$x^4-x^3y^3+22x^3y^2-10x^3y+3x^3+22x^2y^3-3x^2y^2+8-10xy^3+3y^3$$

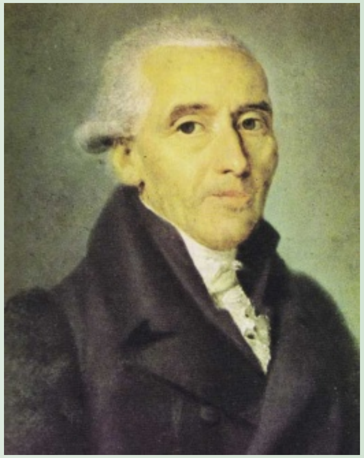
Los polinomios simétricos elementales: $S_r(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

- Si $S_1$, $S_2$ y $S_3$ son los polinomios simétricos elementales en tres variables, construye los polinomios

$$S_1^2S_3-S_2 \quad \text{y} \quad S_2S_3+3S_1-2S_3^2$$

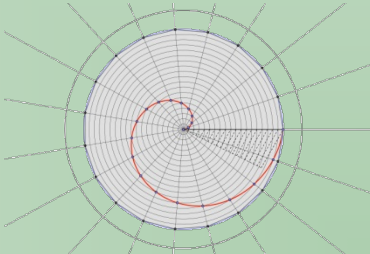
TEOREMA:

*Cualquier polinomio simétrico en n variables es un polinomio de los n polinomios elementales simétricos en dichas variables.*



Lagrange

Newton



- Encuentra tres polinomios en las variables $S_r(X_1, X_2, X_3)$, $1\leq i \leq 3$, que coincidan con

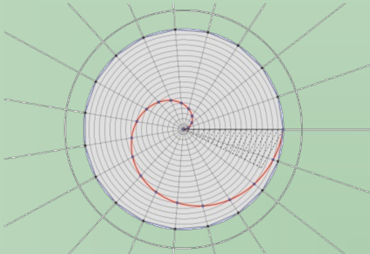
$$x^2+y^2+z^2 \qquad xyz^2+xy^2z+x^2yz \qquad x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$$

Si f un polinomio simétrico en las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, los sumandos de f (monomios) son todos de la forma

$$aX_1^{e_1}X_2^{e_2}\cdots X_n^{e_n}$$

Se denomina grado de f al máximo de las sumas $i_1+i_2+\cdots+i_n$ sobre todos los monomios de f.

- ¿Qué grado tienen los polinomios $S_1^2S_3-S_2$ y $S_2S_3+3S_1-2S_3^2$ ?
- Si f es un polinomio simétrico en n variables de grado h < n, ¿qué polinomios $S_r$ pueden aparecer al expresarlo como un polinomio en los polinomios simétricos elementales?



ESTALMAT CANTABRIA

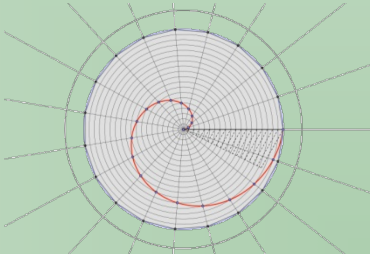
# IDENTITADES DE NEWTON - GIRARD

Sea f= $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \ldots + a_1X + a_0$ un polinomio y sean $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ y $r_n$ sus raíces. Son polinomios simétricos en las raíces

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n \qquad r_1^3 + r_2^3 + \cdots + r_n^3 \qquad \cdots$$

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2 \qquad \cdots \qquad r_1^k + r_2^k + \cdots + r_n^k$$

¿Cómo escribir estás expresiones a partir de los polinomios $S_r$ ?



Si se conoce la suma de varias cantidades (a,b,c) y la de sus productos binarios, se puede determinar la suma de sus cuadrados:

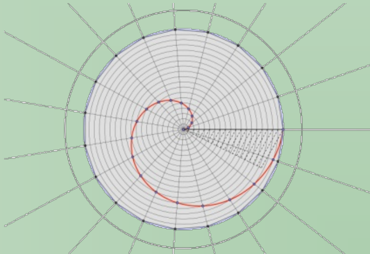
$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)(a+b+c)-2(ab+ac+bc).$$

El conocimiento de la suma de las cantidades, la de los productos binarios y la de los ternarios permite encontrar la suma de cubos,

$$a^3+b^3+c^3=(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)-(ab+ac+bc)(a+b+c)+3abc.$$

Y así sucesivamente.

En general, la suma de cantidades, suma de productos binarios, ternarios, etc., hasta los de k en k, proporciona el conocimiento de la suma de potencias del grado k.



ESTALMAT CANTABRIA

# DEMOSTRACIÓN DE J.J. DURÁN-LORIGA

Sea el polinomio $f= X^n+a_{n-1}X^{n-1}+ a_{n-2}X^{n-2} + \ldots + a_1X+ a_0$ . Queremos calcular

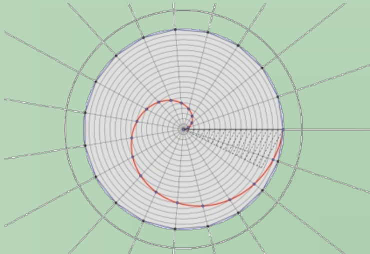
$$P_k = r_1^k + r_2^k + \cdots + r_n^k$$

Caso k=n. Si en la ecuación sustituimos la incógnita por cada una de las raíces:

$$r_1^n+a_{n-1} r_1^{n-1}+ a_{n-2} r_1^{n-2} + \ldots + a_1 r_1+ a_0=0$$
$$r_2^n+a_{n-1} r_2^{n-1}+ a_{n-2} r_2^{n-2} + \ldots + a_1 r_2+ a_0=0$$
$$\ldots.$$
$$r_n^n+a_{n-1} r_n^{n-1}+ a_{n-2} r_n^{n-2} + \ldots + a_1 r_n+ a_0=0.$$

Sumando todas;

$$P_n+a_{n-1}P_{n-1}+ a_{n-2} P_{n-2} +\ldots+ a_1 P_1+ na_0=0$$



Para el resto de valores de k, hagamos un inciso.

$f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \ldots + a_1X + a_0$ raíces: $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ y $r_n$

$g = X^m + b_{m-1}X^{m-1} + b_{m-2}X^{m-2} + \ldots + b_1X + b_0$ raíces: $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ y $s_m$

Si $a_{n-1} = b_{m-1}$ entonces

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = s_1 + s_2 + \cdots + s_m$$

Si además $a_{n-2} = b_{m-2}$ ,

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2 = s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2$$

….

Si $a_{n-k} = b_{m-k}$ se tiene

$$r_1^k + r_2^k + \cdots + r_n^k = s_1^k + s_2^k + \cdots + s_n^k$$

Es decir, si dos ecuaciones tienen iguales los dos, tres, cuatro, etc., primeros coeficientes, las sumas de las raíces, la de los cuadrados de las raíces, las cubos, etc. son iguales.

Aplicando el mismo procedimiento a las ecuaciones:

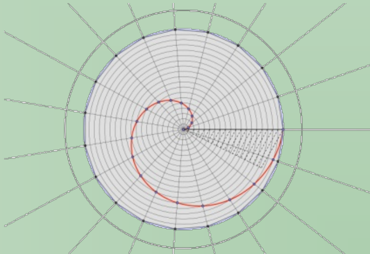
$$X+a_n=0$$
$$X^2+a_{n-1}X+a_n=0$$
$$X^3+a_{n-2}X^2+a_{n-1}X+a_n=0$$
$$\ldots.$$

Se tienen las identidades para $k<n$,

$$P_1+a_n=0,$$
$$P_2+a_{n-1}P_1+2a_n=0,$$
$$P_3+a_{n-2}P_2+a_{n-1}P_1+3a_n=0,$$
$$\ldots.$$

En general: Identidades de Newton – Girard

$$P_k+a_{n-(k-1)}P_{k-1}+a_{n-(k-2)}P_{k-2}+\ldots+a_{n-1}P_k+ka_n=0,$$



ESTALMAT CANTABRIA

En términos de los polinomios simétricos elementales:

$$P_1 - S_1 = 0,$$
$$P_2 - P_1 S_1 + 2S_2 = 0,$$
$$P_3 - P_2 S_1 + P_1 S_2 + 3S_3 = 0,$$
$$\ldots$$
$$P_k - P_{k-1} S_1 + P_{k-2} S_2 - P_{k-3} S_3 + \ldots + (-1)^k k\, S_k = 0,$$

- Si k>n, ¿cómo podemos expresar $P_k$ en términos de los Sr? Intenta expresar P4 en términos de $S_1$ y $S_2$ para el polinomio X2-5X+6? ¿Y el caso general?

$$P_k - P_{k-1} S_1 + P_{k-2} S_2 - P_{k-3} S_3 + \ldots + (-1)^{n-1} P_{k-n+1} S_{n-1} + (-1)^n P_{k-n}\, S_n = 0$$

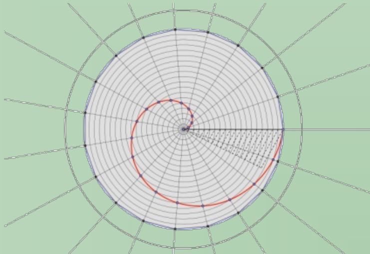
## CONSTRUCCIÓN DE POLINOMIOS

- Prueba que las sumas de las primeras, segundas y terceras potencias de las raíces del polinomio $p(x) = X^3 + 2X^2 + 3X + 4$ valen lo mismo.

- Busca un polinomio de grado tres cuyas raíces sean, precisamente, el cuadrado de las raíces de este polinomio.

- Dada la ecuación X3+X+1=0 de raíces r1,r2 r3, calcular los polinomios cuyas raíces son
  a. $2/r_1$, $-2/r_2$ y $-2/r_3$
  b. $r_1r_2$, $r_1r_3$, $r_2r_3$

- A partir del polinomio $X^4 - X^3 + 2X^2 - 5X - 1$ construye otro cuyas raíces sean $r_i - 1/r_i$ donde $r_i$ representa las raíces del polinomio original.



ESTALMAT CANTABRIA

## POLINOMIOS CON CARACTERÍSTICAS ESPECIALES

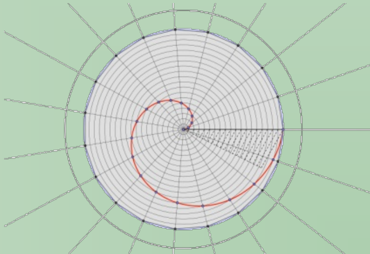
- ¿Cuáles son las raíces de los polinomios $X^2$-9, $X^4$-13$X^2$ -36?
- ¿Qué polinomios tienen como raíz un número y su opuesto? ¿Cómo son?

Se denominan ecuaciones simétricas f=0, a aquellas ecuaciones que cumplen que si un número es raíz, su opuesto también.
(simétrico respecto al eje de ordenadas)

f(x)=0 es simétrica si y sólo si, suprimiendo la raíz nula , f(x) es un polinomio en $x^2$.

Por tanto, para resolver una ecuación simétrica f(x), basta considerar el polinomio g, tal que $g(x^2)=f(x)$ y resolver g(x)=0.

Ecuaciones bicuadradas, bicúbicas…



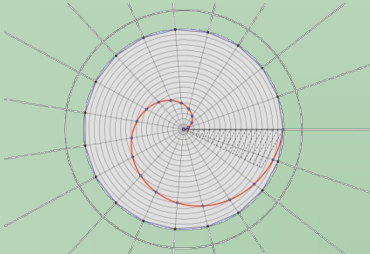
- ¿Cuáles son las raíces de los polinomios $6X^4-35X^3+62X^2-35X+6$ y $4X^3-13X^2-13X+46$?
- ¿Cuál es el resultado del producto $(X-a)(X-1/a)(X-b)(X-1/b)$ (utiliza las formulas de Cardano -Vieta).
- ¿Qué polinomios tienen como raíz un número y su inverso? ¿Cómo son?

Se denominan ecuaciones recíprocas $f=0$, a aquellas ecuaciones que cumplen que si un número es raíz, su inverso también.

$F(X)=a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \ldots + a_1X + a_0 = 0$ es recíproco si y sólo si, suprimiendo las raíces $\pm 1$ que contenga, $f(X)$ es un polinomio de grado par $n=2d$ y

$$a_n=a_0,\ a_{n-1}=a_1,\ a_{n-2}=a_2,\ \ldots,\ a_{d+1}=a_{d-1},$$

Por tanto, si $f(X)$ es recíproco de grado $2d$ (con $f(\pm 1)\neq 0$), existe un polinomio $g$ de grado $d$ con $X^{-d} f(X)=g(Y)$ siendo $y=x+1/x$.



ESTALMAT CANTABRIA

## Resolución de ecuaciones recíprocas

Ejemplo: $f(X)=12X^4-91X^3+194X^2-91X+12$

No tiene raíces ±1 y sus coeficientes son simétricos → OK

$$X^{-2}f(X)=12X^2-91X+194-\frac{91}{X}+\frac{12}{X^2}=12(X^2+\frac{1}{X^2})-91(X+\frac{1}{X})+194$$

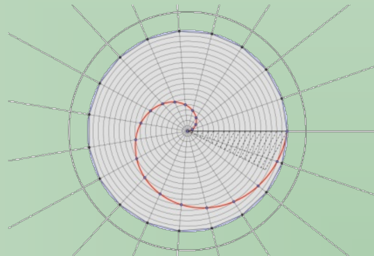
Sustituyendo $Y=X+\frac{1}{X}$, y aplicando las identidades de Newton-Girard

$$X^2+\frac{1}{X^2}=\left(X+\frac{1}{X}\right)^2-2$$

$g(Y)=12(Y^2-2)-91Y+194$ y resolvemos Y=17/4, 10/3

$$X+\frac{1}{X}=\frac{17}{4} \Leftrightarrow 4X^2-17X+4=0 \Leftrightarrow X=4,\frac{1}{4}$$

$$X+\frac{1}{X}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow 3X^2-10X+3=0 \Leftrightarrow X=3,\frac{1}{3}$$



## Aún mas lejos podríamos llegar

- Resultante, Discriminante.
 ( uso de determinantes o algoritmo de Euclides)
- Teoría de la eliminación.

P(x) un polinomio de raíces $r_1$, $r_2$,…, $r_n$. f(x)=A(x)/B(x). Calcular un polinomio Q cuyas raíces sean $f(r_1)$, $f(r_2)$,…, $f(r_n)$.

- Separación de raíces. Teoremas de Sturm, Budan-Fourier, Descartes.
- …

# Y esto es todo

Al conde de Vistahermosa y vizconde de la Vega  D. Cristobal García-Loygorri y Urzaiz.