

Tema: CÁLCULO MENTAL Y CALCULADORA

Primera parte: BREVE RECORRIDO POR LAS ESTRATEGIAS DEL CÁLCULO MENTAL
METODOLOGÍA Y MATERIALES: LOS QUE SE EXPONEN A CONTINUACIÓN
ALUMNOS DEL PRIMER AÑO DE ESTALMAT
SESIÓN DE 75 MINUTOS

HOJA ALUMNO 1

ALUMNO _____ CLASE _____

En los problemas que te proponemos aquí, es necesario hacer los cálculos mentalmente y escribir solamente los resultados, con las unidades adecuadas (€, Kg., m, o lo que sea). No vale hacer trampas, es decir, utilizar la calculadora o hacer operaciones por escrito en algún lugar. Cuando acabes o te manden dejarlo, escribe los minutos que has empleado.

Podrás quedarte esta hoja, para que repases en casa aquello que no te ha salido. Además, procura escribir correctamente, para el próximo día, las igualdades que explican el proceso que has seguido al hacer mentalmente el cálculo, en cada problema.

1. ¿Cuánto he de pagar por la compra de un equipo de música que vale 324 €. y unos auriculares que valen 53 €. _____
2. Si doy un billete de 200 € para pagar un paquete de libros valen 87 €, ¿Cuánto me han de devolver? _____
3. De Villafranca del Bierzo a León hay 129 Km. y de León a Boñar 47 ¿Cuántos Km hay de Villafranca a Boñar? _____
4. Un bidón de 150 litros está lleno, se le sacan 68 litros. ¿Cuántos quedan? _____
5. Dos paquetes pesan 475 Kg. y 213 Kg. Respectivamente ¿Cuanto pesan los dos juntos? _____
6. ¿Cuánto valen dos bicicletas, si cada una cuesta 762 €? _____
7. ¿Cuánto pesan 10 cajas de galletas, si cada caja pesa 475 g.? _____
8. ¿ Cuánto valen 4 libros de la misma colección si cada uno cuesta 6.25 €.? _____
9. ¿Cuanto pesan 5 tableros de madera, si cada uno pesa 36 Kg? _____
10. ¿Cuanto cuestan 11 camisetas de un equipo de fútbol si cada una cuesta a 35 €? _____

Corrección y explicación de la forma de calcular de cada uno

Aciertos: _____ **tiempo:** _____ **min.** **Cociente (A/t):** _____

ALUMNO _____

CLASE _____

LA PRÁCTICA AYUDA A MEJORAR. *La agilidad en el cálculo mental se adquiere con la práctica, es decir, practicando en todas las situaciones de la vida que se te presenten: Intercambios, compas y ventas, mediciones, juegos (Parchís, cartas, tableros y dados, circuitos, calculadora, cuadrados mágicos ...)*

1. Juan ha cobrado este mes 795 € de sueldo y 42 € de extras ¿Qué sueldo total ha cobrado?

2. En una estantería hay 100 libros de una colección donde cada uno pesa 370g. El mueble pesa 28 Kg. ¿Cuánto pesa todo junto?

3. En mi cuenta de ahorro he depositados las siguientes cantidades 67 €, 30€ y 165€ ¿Cuanto tengo ahorrado?

4. ¿Cuánto cuestan 11 trajes completos de un equipo de fútbol si cada uno vale a 325 €.? _____
5. Para una fiesta he comprado un traje que cuesta 245 €. y un abrigo de 120 €. He pagado con un billete de 500 €. ¿ Cuanto me tienen que devolver?

6. ¿Cuánto cuestan 9 juegos de video consola, a 92 €/cada una ?

7. Por ganar un partido pagan una prima de 1250 €. a cada uno de los 11 jugadores que intervienen. ¿Cuánto le costará todo esto al club?

8. ¿Cuánto costarán 50 libros de matemáticas a 24 € cada uno?

9. Para pagar 9 cafés, a 0.85 €. cada uno , he dado un billete de 10 €. ¿Cuánto me han de devolver?

10. ¿Cuánto valen 4 sacos de café , si cada una cuesta 534 €?

Corrección y explicación de la forma de calcular de cada uno

Aciertos: _____ Tiempo: _____ min.

Cociente (A/t): _____

EL ESTUDIO Y EL APRENDIZAJE DE CIERTAS ESTRATEGIAS AYUDA A MEJORAR

El cálculo mental siempre es muy personal: Por ejemplo, aquí aparecen varias formas de multiplicar $25 \cdot 48$:

$$\begin{aligned} 25 \cdot 48 &= 50 \cdot 24 = 100 \cdot 12 = 1200 \\ 25 \cdot 48 &= 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 = 30 \cdot 40 = 1200 \\ 25 \cdot 48 &= 25 \cdot (50 - 2) = 25 \cdot 50 - 25 \cdot 2 = 1250 - 50 = 1200 \\ 25 \cdot 48 &= 25 \cdot (40 + 8) = 25 \cdot 40 + 25 \cdot 8 = 1000 + 200 = 1200 \\ (100:4) \cdot 48 &= 100 \cdot (48:4) = 100 \cdot 12 = \end{aligned}$$

Pero, ¿son las únicas?, ¿cuál es la mejor?, ¿por qué? Para encontrar respuestas a estas y otras preguntas similares, nos encontraremos ante análisis de cantidades involucradas, dificultades de unas u otras estrategias de cálculo, ventajas e inconvenientes de cada una de ellas, elección y toma de decisiones, transferencia a situaciones análogas, posibilidad de generalización etc. Todas estas situaciones que podrían surgir del análisis del cálculo mental en clase, ayudan claramente a la formación de estrategias de pensamiento en nuestros alumnos, que si bien se sitúan inicialmente en el campo numérico, pueden servir para esquemas más generales y formativos.

En todo momento deberás **controlar el proceso** y **buscar la estrategia que te resulte más fácil**, además de profundizar en el **conocimiento de las operaciones, su significado y sus propiedades**. Así como utilizar la **descomposición y proximidad de las decenas o centenas,...**

SUMA / RESTA. DOMINAR LA SUMA ES FUNDAMENTAL

1º.- Procurar empezar por la mecanización de *algunas de las estrategias de aprendizaje más eficaces para la mecanización del cálculo con números <20.*

	ESTRATEGIA	<i>EXP.MATEMÁTIC</i>	EJEMPLOS
1	1. Sumar o restar	$n+1, n-1$	Siguiente. Anterior
2	2. Sumar o restar	$n+2, n-2$	$4+2, 5+2, 6+2, \dots 7-2, 8-2$
	3. Conmutatividad	$a+b=b+a$	$1+4, 1+5, \dots 2+7 = 7+2$
	4. Relación op.inversas	$2+3=5 \Rightarrow$	$5-3 = 2 \Rightarrow 3+2=5$
	5. Estructura de 5 a 10		$5+1, 5+2, 5+3, 5+4, 5+5$

Tema: CÁLCULO MENTAL Y CALCULADORA

6.	Parejas suman 10	+ conmutatividad	5+5, 6+4, 7+3, 8+2, 9+1
7.	Inversa parejas +10	$10-1, \dots, 10-n$...10-6, 10-7, 10-8, 10-9
8.	A un nº sumar 9	$n+9=n+10-1$	
9.	Estructura numérica	$10+n$ $20-n$	10+1, 10+2, ..., 10+9, 10+10 19 = 20 -1, 18 = 20 -2
10.	Inv. estructura numérica		14-4, 15-5, 17-7
11.	Dobles	$n+n$	6+6, 7+7, 8+8,
12.	Descomposiciones	$dobles\ n+n+?$ $En = 10 + ?$	6+7=6+6+1, 7+8=7+7+1, ... 8+3=8+2+1, 7+5=7+3+2,

2º.- Seguir con la graduación de las dificultades entre los $n < 100$ y superiores...

ESTRATEGIA	<i>Aclaraciones</i>	EJEMPLOS
13. Saltando decenas		40+10, ... 50-20, ... 84+10
14. Suman 100	$a+b=100$	30+70, 20+80
15. Suman más de 100		70+50 = 70 +30 +20
16. Sist. de numeración	<i>Sumar unidades</i> <i>Restar unidades</i> <i>Sumar o restar 10</i>	50+3, 70+5, 70+8... 34+3, 75+2 34-4, 76-6, 42-2 34-10, 57-10, 36+10
17. Completando decena		45+5, 62+8, 23+7
18. Descomposiciones CDU = Cx100+Dx10+U	<i>Sist. numeración y salto D.</i> <i>Completando decena</i> <i>Salto dec hacia atrás</i> <i>Quitar C. y sumar D.</i> <i>Control salto C.</i>	50+26=50+20+6 53+8 =53+7+1; 34-6=34-4-2 456-200 = 400-200+56 670+80 =670 +30+50

MULTIPLICACIÓN.

Aplicar las propiedades Conmutativa. Distributiva. Factorizar y dominar las operaciones básicas:

- Para multiplicar por 10, 100, 1000, etc., un número natural, llega con añadir uno, dos, tres, etc. ceros a la derecha: Ejemplo: $327 \times 10 = 3270$; $327 \times 1000 = 327000$.
- Multiplicar un número por 2 es *calcular su doble*. Se puede hacer duplicando sus unidades, decenas, centenas, etc., empezando por las más grandes, e ir sumando estos resultados. Ej.: $586 \times 2 = (500 + 80 + 6) \times 2 = 500 \times 2 + 80 \times 2 + 6 \times 2 = 1000 + 160 + 12 = 1172$
- De la misma manera se pueden hacer multiplicaciones por 4, 8 y otras potencias de dos, $n \times 4 = N \times 2 \times 2$, o sea que multiplicar un n° por 4 es multiplicarlo *dos veces por dos*. Ejemplo: $87 \times 4 = 87 \times 2 \times 2 = 174 \times 2 = 348$.
- Para multiplicar por 5, es mejor hacerlo por 10 y dividir entre 2, ya que $5 = 10/2$
- Multiplicar por 11 es lo mismo que multiplicar por 10 y sumar el número.
- $N \times 11 = N \times (10 + 1) = N \times 10 + N \times 1 = N \times 10 + N$
- P.e. : $372 \times 11 = 372 \times (10 + 1) = 372 \times 10 + 372 \times 1 = 3720 + 372 = \dots = 4092$
- La multiplicación por 9 se puede hacer mentalmente de forma similar al 11.
- Por ejemplo: $87 \times 9 = 87 \times (10 - 1) = 87 \times 10 - 87 \times 1 = 870 - 87 = \dots = 783$
- Por 3 se procede de forma parecida "*el triple*" o sumar tres veces pero es algo más difícil.
- *Entrénate pensando, para el próximo día, como se puede hacer mentalmente multiplicaciones por 101, 99, 12, 102, 13, ...*
- Método cruzado de multiplicación (Alberto Coto) . p. e 37×85 es unidades $7 \times 5 = 35$ el 5, decenas $5 \times 3 + 3 = 7 \times 8 = 74$ el 4, centenas $8 \times 3 + 7 = 31$, resultando el número 3145

División:

- La división es la operación inversa de la multiplicación, es decir para hacer la división $258 : 6$ se trata de encontrar un número que multiplicado por 6 dé 258, es decir, $40 \times 6 = 240$, faltan 18 que es 3×6 , resultando un cociente de 43

Ejemplos

- Las divisiones más sencillas son las divisiones por potencias de 10, es decir 10, 100, 1000, etc., que ya sabes como se hacen: $5740 : 10 = 574$;

$$5740 : 100 = 57.4 ; 5740 : 1000 = 5.74 ; 1235000 : 1000 = 1235$$

- Las divisiones por 2 consisten en hacer *la mitad* del número dado, lo que se hace mentalmente haciendo la mitad de sus unidades, decenas, centenas, etc.; empezando por las más grandes y sumando los resultados. Por ejemplo:

$$387 : 2 = \frac{1}{2} \text{ de } 387 = \frac{1}{2} (300 + 80 + 7) = \frac{1}{2} 300 + \frac{1}{2} 80 + \frac{1}{2} 7 = 150 + 40 + 3.5 = 195.5$$

- Se puede dividir por 4 dividiendo dos veces por 2

- Las divisiones por 5 se pueden hacer mentalmente teniendo presente que 5 es la mitad de 10: $N/5 = 1/5 N = 2 \times N/10$.

P. e.: Para calcular $524 : 5$ hacemos $524 \times 10 = 5240$ y ahora la mitad de esto 2620

$$147 : 5 = 2 \times 147 / 10 = 294 / 10 = 29.4$$

- Dividir por 6 es hacer primero por 2 y después por 3

p.e. $96 : 6$ es $96 : 2 = 48$ y después $48 : 3 = 16$

La practica ayuda a mejorar

hoja del alumno 3

Cuadrados perfectos

- Cuadrados de naturales hasta el 15, se deben conocer
- Practica: Cuadrados de naturales entre 15 y 20. Puedes utilizar las identidades notables para calcularlos $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- Cuadrados de n° naturales acabados en 5 ¿Qué regla sigue?

5^2 15^2 25^2 35^2 45^2 55^2 65^2 75^2 85^2 95^2 ...

25 225 625 1225 2025 3025 4225 5625 7225 9025 ...

Cubos perfectos

- Los cubos de los 10 primeros naturales son:

0^3 1^3 2^3 3^3 4^3 5^3 6^3 7^3 8^3 9^3 10^3

0 1 8 27 64 125 216 343 512 729 1000

- ¡Adivina, adivinanza!. Soy capaz de calcular raíces cúbicas de los n° naturales de dos cifras que son cubos perfectos

Diferentes formas para trabajar el cálculo mental:

Cálculo escrito

→ - Trabajar la comprensión escrita a través de series graduadas de problemas.

Cálculo oral
El "Quinzet"

→ - Trabajar la comprensión oral a través de series graduadas de problemas.

Tablas de cálculo
Juan Jesús Jiménez

<http://docentes.educacion.navarra.es/jjimenei/index.html>

→ -Mejorar la rapidez del cálculo de operaciones aritméticas, algebraicas y situaciones matemáticas básicas.

Juegos y recursos

→ - Cifras y letras, pirámides, dominós, ...
- Webs: Descartes, THATQUIZ, ...
- Calculadora

Segunda parte: **Introducción a la calculadora**

METODOLOGÍA Y MATERIALES: LOS QUE SE EXPONEN A CONTINUACIÓN
ALUMNOS DEL PRIMER AÑO DE ESTALMAT
SESIÓN DE 75 MINUTOS

- **Conoce la calculadora:** Teclado→Proceso→Pantalla.
- **El Cálculo Mental y la jerarquía de las operaciones**

Practicando: El señor Números ha logrado formar todos los números del uno al nueve utilizando cinco cincos. Al pasarlos a limpio su ayudante se ha olvidado de poner los paréntesis y por tanto al hacer las operaciones ya no dan los resultados que se indican. ¡Anímate y vuelve a colocarlos tú! ¡OJO!, solo los necesarios, ni uno más.

- $55 : 5 - 5 + 5 = 1$ $5 + 55 : 55 = 6$
- $5 - 5 + 5 + 5 : 5 = 2$ $5 + 5 : 5 + 5 : 5 = 7$
- $5 + 5 : 5 + 5 : 5 = 3$ $5 + 5 - 5 : 5 + 5 : 5 = 8$
- $5 + 5 + 5 + 5 : 5 = 4$ $5 + 5 - 5 : 5 + 5 - 5 = 9$
- $5 + 5 : 5 - 5 \times 5 = 5$

La calculadora para incidir en los conceptos

1.-INVESTIGANDO OPERACIONES (I).

1.1 Convertir alguna de las cifras en ...

- Convertir en 0 las cifras de orden inferior del nº 4567
- Convertir todas las cifras en nueves. Tenemos el nº 126 y hemos de conseguir 999 ¿Cómo?
- En la pantalla tenemos el nº 362 y queremos obtener 1000. ¿Cómo obtenerlo?

1.2 Teclas estropeadas

- ¿Cómo escribir 360 en la calculadora si tenemos la tecla del 0 estropeada?
- Con la tecla del 0 estropeada ¿cómo podemos obtener en la pantalla 1030?.
- ¿Cómo escribir 37 solamente con la teclas 1, 0, +, =
- Hacer $456 - 127$ sin apretar la tecla (-)
- Calcular 67×15 sin apretar la tecla (\times)
- $200:27$ utilizando solo la tecla de (x)
- $108/27$ utilizando solo la tecla (+)
- $175/35$ utilizando solo la tecla (-)

Tema: CÁLCULO MENTAL Y CALCULADORA

1.3 Buscar parejas

- Con la ayuda de tu calculadora, **Busca parejas** de números cuyo **producto** esté comprendido entre 30 y 50
 - » Entre 1500 y 2000
 - » Entre 15 y 16
 - » Entre 0 y 1

INVESTIGANDO OPERACIONES (II). *Estas técnicas las utilizó David Fielker, Felix Alayo, etc. de cuyos ejercicios hemos adaptado alguno.*

1.- Sin apretar la tecla x calcular

- 17×15
- 351×50
- 34×2.6

2.- ¿Como harías estas operaciones si la tecla x está estropeada?

- » 37×12
- » 72×99
- » 72×0.9
- » 45×105
- » 59×199

3. En las siguientes expresiones cada * representa una operación. Trata de averiguarla.

- $(37 * 21) * 223 = 1000$
- $(756 * 18) * 29 = 1218$
- $27 * (36 * 18) = 675$
- $31 * (87 * 19) = 2108$
- $476 * (2040 * 24) = 391$
- $(3461 * 276) * 101 = 37$
- $619 * 316 * 425 * 196 = 924$
- $(2^9 * 8^2) * 8 = 64$

4.- Encuentra la cifra que representa cada raya:

- $93 \times 8_ = 8 _ _ 1$
- $83_ \times _ 6 = 46816$
- $3_ _ \times 84 _ = 18001$
- $4 _ _ 6 : 8 _ = 48$

La calculadora en contexto de resolución de problemas (I)

1. *Calcula mentalmente ¿Cuánto es un cuarto?, Después hazlo con la calculadora.*
2. *Calcula mentalmente ¿Cuánto es tres quintos?, Después hazlo con la calculadora.*
3. *Calcula mentalmente ¿Cuánto es tres cuartos?, Después hazlo con la calculadora.*
4. *Escribe decimales que estén entre los dos últimos resultados*
5. *Escribe fracciones que estén entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{4}$*
6. *Obtén 0.25 sin pulsar las teclas del 0, 2 y 5.*
7. **Realiza las divisiones enteras de $350:56$ y $459 : 23$ y $3589:223$**
8. **Al dividir $59:8$ te da 7.375. Sin hacer la división entera, ¿ Sabrías decir cuál es el resto?. Busca el algoritmo**
9. *Con la calculadora di cual es el **cociente** de la división $4.57:3.2$ solo con dos decimales y di cual es el **resto**. Comprobarlo*
10. *Se han tomado dos números enteros menores que 30; se ha dividido uno entre otro en la calculadora y sale 1. 4117647. ¿ Cuáles son esos dos números: dividendo y divisor?*

La calculadora en contexto de resolución de problemas (II)

1.- Comerciante

Un comerciante descubrió un truco genial: si quería vender a un precio determinado, lo aumenta en un 15% y así hacía al cliente un 15% de descuento cuando venía a comprar. ¿Qué opinas de la actitud del comerciante?

2.- Descuento e IVA

¿ Qué prefieres que te hagan primero el descuento del 20% o el incremento del 18% de IVA?. Razona. Puedes probar con casos sencillos. Generaliza

3.- Averigua, ayudándote de tu calculadora, si el producto de cuatro números enteros consecutivos sigue alguna regla. Generalízala

$$3 \times 4 \times 5 \times 6 =$$

$$4 \times 5 \times 6 \times 7 =$$

4.- Averigua, ayudándote de tu calculadora, si la diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos sigue alguna regla. Generalízala

$$5^2 - 4^2 =$$

$$725^2 - 724^2 =$$

5.- Multiplica en tu calculadora dos números cuya diferencia sea 4.

Súmale 4 a lo que te dé . ¿Qué obtienes? Ocurre siempre lo mismo. Generaliza

La calculadora en contexto de Juegos

LA TRIADA

Es un juego para dos jugadores. En su turno, cada jugador elige dos números cualesquiera del 1 al 9. Con ellos formará un producto y después marcará su lugar en la línea inferior y lo colocará.

Cada jugador utilizará un color determinado. Necesitas dos lápices o bolígrafos de colores.

El objetivo del juego es conseguir tres marcas en la línea, sin ninguna del compañero en medio.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	50	81
---	----	----

4 OCHOS	
Nº de jugadores	Todos los que se quiera
Reglas del juego	Imagina que dispones de 4 ochos y el profesor dice que con ellos sometidos a las operaciones que quieras, se puede obtener el número 120. ¿ Podrás conseguirlo?
Ganador	Gana quien consiga visualizar el resultado de la operación, en otra versión , quien lo consiga antes
Ejemplos	¿?
Objetivos	Utilizar la calculadora, prioridad operaciones, técnica de ensayo y error, etc

TRES EN RAYA I

- Juego para dos jugadores
- Necesitáis fichas de dos colores distintos *o bolígrafos de colores*, uno por cada jugador, y una calculadora.
- Cada jugador *elige dos números, uno de cada grupo*.

75	15	22	8
33	9	21	67

- Comunica los números elegidos al compañero y después **los suma mentalmente o con la calculadora**. Si no está ocupada la casilla donde está el resultado obtenido coloca en ella una ficha o subraya en color.
- Jugáis por turno.
- Gana el primero que consiga colocar tres fichas en raya.

84	55	108	29
48	24	43	75
36	142	41	31
96	89	82	17

Tema: CÁLCULO MENTAL Y CALCULADORA

TRES EN RAYA				
Nº de jugadores	2 Jugadores			
Material	Fichas o bolígrafos de colores y calculadora			
Reglas del juego	Por turno, cada jugador elige dos números, uno de cada fila y los multiplica con la calculadora o mentalmente. Si la casilla correspondiente no está ocupada, la marca o coloca una ficha en ella			
Ganador	Gana quien coloque 3 en raya.			
Elección de números	7	15	22	8
	33	9	6	21
Tablero	63	726	231	48
	495	135	132	90
	168	147	264	198
	42	462	315	72

CÁLCULO MENTAL Y CALCULADORA en contexto de juegos

- **EL MENOR NÚMERO DE PASOS**
- Dos jugadores y una calculadora.
- El jugador A escribe un **nº de salida** en la calculadora e indica **otro distinto llegada** y anota el nº de pasos.
- El jugador B tiene que conseguir que aparezca en la calculadora el nº indicado a partir del nº que figura en la pantalla **con el menor nº de pasos**. *Cada paso consiste en pulsar +, -, x, :, un número y la tecla =*
- Se anotan los pasos. Gana el jugador que haya necesitado menos pasos en total.
- Juegan seis veces intercambiando los papeles cada vez los jugadores.
- *Se puede jugar con distintos niveles limitando los números y las operaciones:*
- Números menores que 100 con + y -
- Números menores que 100 y utilizando números de una sola cifra para aproximarse. etc

Tabla de recuento:

Jugador A	Nº salida	Nº llegada	Pasos	Nº pasos
Jugada 1				
Jugada 2				
Jugada 3				
Jugada 4				
Jugada 5				
Jugada 6				
			Total	
Jugador B	Nº salida	Nº llegada	Pasos	Nº pasos
Jugada 1				
Jugada 2				
Jugada 3				
Jugada 4				
Jugada 5				
Jugada 6				
			Total	