PROYECTO ESTALMAT

PROBLEMAS SEMILLA: ALGUNOS EJEMPLOS

(OCTUBRE DE 2008)

FICHAS BLANCAS Y NEGRAS

Queremos pasar las fichas blancas al lugar de las negras y éstas al de las blancas. Para ello se deben cumplir las reglas siguientes:

Una ficha puede moverse a la casilla de al lado si está libre, y también puede saltar sobre una de distinto color si a continuación hay un hueco. Ninguna ficha puede retroceder. ¿Cuántos movimientos necesitamos para conseguirlo? Presenta la secuencia de movimientos que hay que realizar.

Hasta ahora teníamos tres fichas a cada lado. Vamos a variar el número de fichas y encontrar la fórmula que nos da el número de movimientos para cualquier número de fichas n a cada lado..

Hasta ahora el número de fichas era el mismo a cada lado. Resolver el problema si puede haber distinto número de fichas a cada lado n y p.

Hasta ahora, en todas las preguntas planteadas, había un hueco con un lugar libre en medio de las fichas. Resolver el problema si hubiera un hueco, en medio, con varios lugares libres, por ejemplo h huecos.

EL CUBO PINTADO

En el cubo de la figura, de tres cubitos en cada arista, pintamos sus caras exteriores con pintura de un color. Averiguar:

-Cuántos cubitos tendrán pintada alguna cara.

-Cuántas caras de cada cubito quedarán pintadas.

Responder a las mismas preguntas para un cubo con n cubitos en cada arista.

Con los 27 cubitos construimos paralelepípedos usando todos ellos en cada uno. ¿Qué valores pueden tener las dimensiones de los cuerpos resultantes, sin distinguir largo, ancho o alto?

¿Y si los construimos con 64 cubitos, provenientes de un cubo con 4 cubitos en cada arista?

Si la arista de un cubo contiene p^n cubitos, con p primo, ¿qué valores pueden tener las dimensiones de los paralelepípedos construidos con los p^{3n} cubitos, sin distinguir largo, ancho o alto?

Si la arista de un cubo contiene p.q cubitos, con p, q primos, ¿qué valores pueden tener las dimensiones de los paralelepípedos construidos con los $(pq)^3$ cubitos, sin distinguir largo, ancho o alto?

De los paralelepípedos obtenidos en cualquiera de las cuestiones analizadas, calcular:

-Superficie total

-Suma de las longitudes de las aristas

-Valores posibles para la superficie de una cara.

Hasta ahora hemos trabajado con cubos macizos. Averiguar lo que ocurriría si los cubos estuvieran huecos.

DADOS CÚBICOS PARA TRABAJAR

Los dados son cubos con un sistema especial para su numeración, en los que se aplica la siguiente regla:

El número total de puntos en dos caras opuestas es siempre siete.

A la derecha puedes ver tres dados colocados uno encima de otro. El dado situado en la parte superior tiene dos puntos en la cara de arriba.

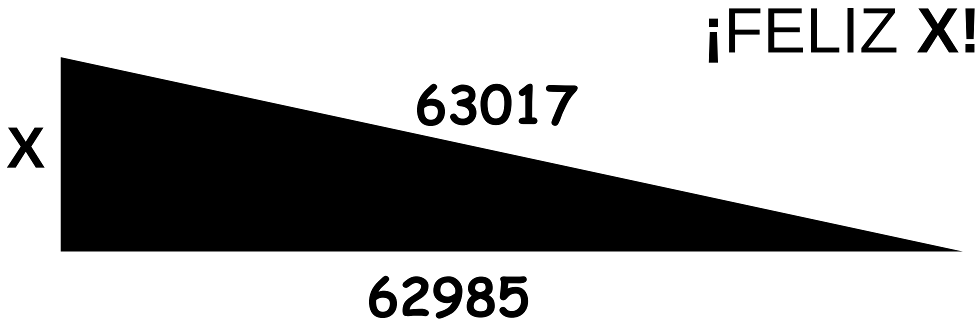
¿Cuántos puntos hay en total en las cinco caras que no se pueden ver (cara de abajo del dado superior, caras de arriba y de abajo de los otros dos dados)?

¿Cuánto suman todas las caras ocultas de los tres dados?

Plantear las mismas cuestiones para el caso en que tengamos n dados colocados uno encima del otro, formando una columna.

TERNAS PITAGÓRICAS

Las pasadas fiestas navideñas recibí el siguiente correo electrónico:



Averiguar su significado.¿Es una casualidad o hay algo más detrás?

Dar ejemplos de ternas pitagóricas y explicar su significado geométrico. ¿Conoces alguna fórmula para la obtención de ternas pitagóricas? Encontrar alguna.

¿Podemos encuadrar la terna de la felicitación en alguna de las fórmulas? Estudiar el caso.

Hemos visto que la terna de la felicitación estaba construida a partir de la fórmula general, para unos valores concretos de a y b. Obtener otras felicitaciones para el mismo valor de x.

Queremos preparar todas las posibles felicitaciones para felicitar el año nuevo 2010. ¿Cuántas hay distintas? Constrúyelas.

Queremos hacer una felicitación para el año 2009. ¿Cómo podríamos elaborarla?

¿De dónde provienen las expresiones $a^2 - b^2$, $2ab$, $a^2 + b^2$*? ¿Cómo podríamos obtenerlas mediante un proceso razonado?*

FACTORES DE CORRECCIÓN

En una revista de matemáticas aparece el siguiente comentario:

"Un estudiante de escuela secundaria regresó a su hogar contando que su maestra de matemáticas estaba descontenta con las calificaciones de sus alumnos en una prueba escrita que habían realizado sobre funciones, atribuyéndolo a que quizá las preguntas propuestas habían sido un tanto difíciles. La maestra decidió "ajustar" esas calificaciones usando un factor de corrección…

¿Qué factores de corrección podemos proponer a la profesora para que modifique las notas? Expresarlos en forma algebraica y representarlos gráficamente. Analizar las ventajas e inconvenientes de cada uno.

La revista continúa así:

"Si la calificación original era x (en una escala de 0 a 100), ésta devendría en $10\sqrt{x}$ *. Es decir, si la calificación inicial fue 81, la corregida sería 90. Aparentemente, este factor es común entre los maestros en Israel".*

Adapta el factor de corrección de la maestra israelí a nuestro país, donde las notas están entre 0 y 10. Exprésalo algebraicamente y haz su representación gráfica. Analiza sus ventajas e inconvenientes respecto a los anteriores.

¿Podríamos variar este factor para obtener otros similares? Prueba introduciendo algún cambio en su expresión algebraica: índice de la raíz, exponente de 10 ó exponente de x. Analiza las características de cada uno y su idoneidad. Por ejemplo:

$$F_n(x) = \sqrt[n]{N^{n-1}x} \qquad G_n(x) = \sqrt[n]{N.x^{n-1}} \qquad x \in [0, N] \quad n \in \mathrm{N},\ n \geq 2$$

(N es la mayor nota que se puede sacar en el examen)

Si hacemos n muy grande, ¿hacía qué funciones se acercan los factores de corrección F_n y G_n ?

Cuando N=10, nos interesa saber, para cada factor de corrección, el valor de x que se transforma en la nota 5. Averiguarlo en varios de ellos.

Analizar la veracidad de las siguientes afirmaciones acerca de los factores F_n y G_n:

- Para los factores F_n la nota que se transforma en N/2 puede ser tan pequeña como queramos, con tal de tomar un n suficientemente grande.

- Para los factores G_n la nota que se transforma en N/2 puede estar tan próxima a N/2 como queramos, con tal de tomar un n suficientemente grande.

Deseamos que al aplicar F_n ó G_n, una cierta nota c<5 se transforme en un 5. Averiguar el valor de n para que esto ocurra. ¿Siempre existe ese n?

¿Los factores de corrección F_2 y G_2 tienen alguna característica especial en el conjunto de los F_n y G_n?

Reflexionando sobre las expresiones de los factores F_n y G_n, encuentra una expresión que los englobe a los dos, de manera que todos pasen a formar parte de una sola familia de factores de corrección.

Encontrar un factor de corrección análogo a los F_n y G_n anteriores, de manera que si la nota más alta obtenida en el examen es un 8, lo transforme en 10 y las demás notas las modifique proporcionalmente.

El objetivo principal del trabajo anterior ha sido subir las notas de un examen, utilizando para ello una familia de funciones como factores de corrección. Para completar el estudio nos vamos a estudiar otras posibilidades que podíamos habernos encontrado:

¿Habrá factores de corrección para bajar las notas de un examen muy fácil?

¿Habrá factores de corrección que aumenten las notas de una forma distinta a como lo hacen las funciones anteriores? Por ejemplo, busca factores de tipo logarítmico, o trigonométrico. Dar respuesta a la misma cuestión para cuando deseemos bajar las notas.

¿Habrá factores de corrección que aumenten unas notas y disminuyan otras?

¿Habrá factores de corrección que aumenten unas notas y disminuyan otras de manera caprichosa, por ejemplo, que aumente las notas entre 0 y 1, disminuya las notas entre 1 y 2, y así sucesivamente?

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1. Averiguar qué relación existe entre las soluciones de las ecuaciones de segundo grado:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0} \qquad \mathbf{cx^2 + bx + a = 0}$$

2. Averiguar qué relación existe entre las soluciones de las ecuaciones de segundo grado:

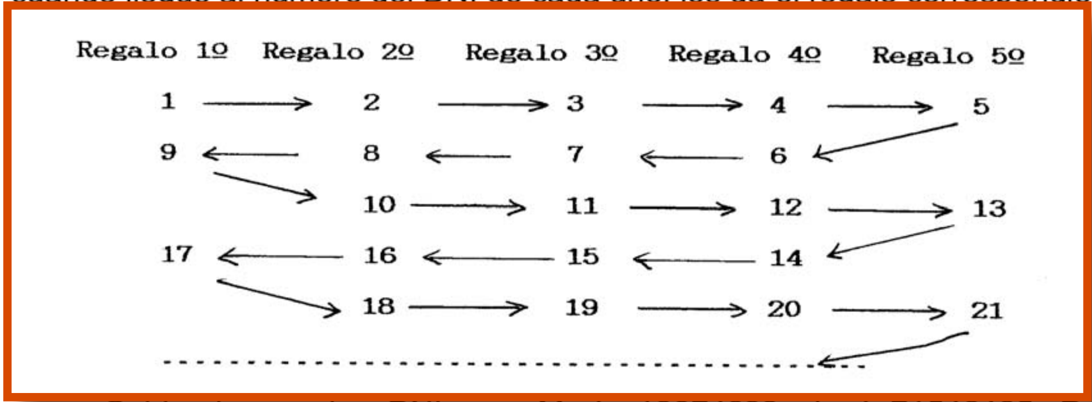
$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0} \qquad \mathbf{ax^2 - bx + c = 0}$$

3. Dada la ecuación $\mathbf{x^2 + 3x = p}$, calcular el valor de p, para que las soluciones sean:

a) Números enteros
b) Números decimales

UN REPARTO DE REGALOS MUY ESPECIAL

Mercedes quiere hacer un regalo a cada uno de sus amigos María, José, Pedro, Eva y Juan. Para ello compra cinco regalos y se inventa el siguiente método de asignación: va contando los regalos como se describe en la figura y cuando llegue al número del DNI de cada uno, les da el regalo correspondiente.



Sabiendo que los DNI son: María 13074698, José 71546465, Pedro 71284868, Eva 18468311 y Juan 23710429, averiguar si el método es adecuado y, en ese caso, qué regalo corresponde a cada uno.

Explicar cómo resolver el problema si tuviéramos 4 regalos, para asignarlos a cuatro personas. ¿Y si tuviéramos 6 regalos? ¿Y si fueran n regalos?

Inventa otras formas de contar los regalos y encuentra las leyes matemáticas que los rigen.

MONTONES DE CERILLAS

Tenemos tres montones de cerillas con 11, 7 y 6 cerillas en cada uno. Queremos conseguir el mismo número de cerillas en cada montón. Para ello debemos cumplir una condición: cada montón puede recibir el mismo número de cerillas que ya tenga, y deben provenir todas del mismo montón. ¿Cómo hacerlo en el menor número de movimientos posibles?

Tenemos dos montones de cerillas con distinto número de cerillas cada uno. Pasamos sucesivamente del montón más grande al más pequeño tantas cerillas como haya en éste último. Terminamos el proceso cuando obtengamos el mismo número de cerillas en cada uno.

¿Cuántas cerillas debe haber inicialmente en cada montón para conseguir la igualdad? ¿En cuántos pasos llegaremos a ella?

NÚMEROS EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

¿Será posible rellenar los espacios vacíos de la tabla con números enteros positivos, de modo que los números de cada fila y de cada columna formen progresiones aritméticas (p.a.)?

	74			
				186
		103		
0				

Resuelve el problema de tres formas diferentes.

Si nos dan cuatro datos de la figura, situados en otros lugares, ¿podemos completar siempre el cuadrado? Poner ejemplos.

Demostrar que las diferencias correspondientes a las p. a. que forman las filas (líneas horizontales) y las de las columnas (filas verticales) también forman unas progresiones aritméticas. Demostrar que las diferencias de estas progresiones son iguales. A ese número común le llamaremos la diferencia de Priscila de la tabla.

Resuelve el siguiente problema, de la olimpiada de bachillerato de 2004:

Tenemos un conjunto de 221 números reales cuya suma es 110721. Los disponemos formando una tabla rectangular de modo que todas las filas y la primera y última columna son progresiones aritméticas de más de un elemento. Probar que la suma de los elementos de las cuatro esquinas vale 2004.

Usar el problema anterior para encontrar una fórmula que nos permita calcular el valor de la suma de todos los elementos de una tabla de este tipo, en función de los elementos de las esquinas de la tabla.

NÚMEROS NATURALES CONSECUTIVOS: suma de potencias y suma de productos

Descripción
El objetivo de esta tarea es investigar modelos y formular conjeturas acerca de sucesiones numéricas.

Se considera la identidad $(1+k)^2 = 1+2k+k^2$.

a) Escribir las igualdades que se obtienen, en la identidad anterior, al sustituir k por los valores 1, 2, 3, …, n. A continuación sumar todas las igualdades obtenidas y comprobar que se obtiene la relación siguiente:

$$(1+n)^2 = n+2\sum_{i=1}^{n} i + 1$$

b) A partir de la relación anterior, despejar y obtener una fórmula para la suma de los n primeros números naturales: $\sum_{i=1}^{n} i$.

Se considera la identidad $(1+k)^3 = 1+3k+3k^2+k^3$.

c) Siguiendo un proceso análogo al del apartado a), es decir, sustituyendo k por los valores 1, 2, 3, …, n, se obtienen unas igualdades. Sumando todas ellas, comprobar que se obtiene la relación siguiente:

$$(1+n)^3 = 1+3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + n$$

d) Utilizando la relación anterior, obtener una fórmula para la suma de los n primeros cuadrados de los números naturales: $\sum_{i=1}^{n} i^2$.

e) Comprobar, mediante el método de inducción, la validez de la fórmula obtenida en el apartado anterior.

f) A partir del desarrollo de la expresión $(1+k)^4$, realizar un proceso análogo a los anteriores para obtener una fórmula que permita calcular la suma de los n primeros cubos de los números naturales: $\sum_{i=1}^{n} i^3$.

g) Con el desarrollo de $(1+k)^5$, obtener una fórmula para calcular $\sum_{i=1}^{n} i^4$.

h) A partir de la identidad:

$$(1+k)^{p+1} = \binom{p+1}{0} + \binom{p+1}{1}k + \binom{p+1}{2}k^2 + \ldots + \binom{p+1}{p}k^p + \binom{p+1}{p+1}k^{p+1}$$

y con el modelo de trabajo anterior, obtener una fórmula para calcular $\sum_{i=1}^{n} i^p$ en función de las expresiones $\sum_{i=1}^{n} i^{p-1}$, $\sum_{i=1}^{n} i^{p-2}$, …, $\sum_{i=1}^{n} i^3$, $\sum_{i=1}^{n} i^2$ y $\sum_{i=1}^{n} i$.

Se considera ahora la expresión $k(k+1) = k^2 + k$. A partir de ella se puede obtener la expresión

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k .$$

k) ¿Cómo se puede hacer razonadamente lo anterior?

l) A partir de $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$, encontrar una expresión para $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$, en función de $\sum_{i=1}^{n} k^2$ y de $\sum_{i=1}^{n} k$ y demostrar su validez por inducción.

m) Desarrollando la expresión $k(k+1)(k+2)$, obtener la expresión para $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ en función de $\sum_{i=1}^{n} k^3$, $\sum_{i=1}^{n} k^2$ y $\sum_{i=1}^{n} k$ y demostrar su validez por inducción.

n) Con el modelo anterior, formular una conjetura para el valor de la expresión $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)...(k+p)$ en función de las expresiones de $\sum_{i=1}^{n} k^{p+1}$, $\sum_{i=1}^{n} k^p$, …, $\sum_{i=1}^{n} k$.

MODELO PARA DESCRIBIR EL CURSO DE UNA ENFERMEDAD VÍRICA Y SU TRATAMIENTO

Descripción

Cuando las partículas víricas de un cierto tipo de virus penetran en el cuerpo humano, se duplican rápidamente. En cuatro horas, aproximadamente, el número de partículas víricas se duplica. El sistema inmune no responde hasta que no hay aproximadamente un millón de partículas víricas.

La primera respuesta del sistema inmune es la fiebre. La elevación de la temperatura hace que el ritmo al que se multiplican la partículas disminuya hasta alcanzar una tasa del 160% cada cuatro horas; sin embargo, el sistema inmune sólo logra eliminar estas partículas vírica a un ritmo de unas 50.000 partículas por hora. A menudo la gente no acude inmediatamente al médico, puesto que piensan que tienen un simple catarro. Sin embargo, si el número de partículas víricas llega hasta 10^{12} la persona muere.

Modelo para describir la infección

1. Desarrolle un modelo para la fase inicial de la enfermedad para una persona infectada con 10.000 partículas víricas, para así determinar cuánto tiempo tardará en iniciarse la respuesta del sistema inmune del paciente.

2. Utilizando algún método que considere adecuado (hoja de cálculo, calculadora gráfica, etc.) desarrolle un modelo para la siguiente fase de la enfermedad, cuando la respuesta inmune ya ha comenzado pero aún no se ha administrado ninguna medicación. Utiliza el modelo para determinar cuánto tiempo tardará el paciente en morir si no se trata la infección.

Modelo para la recuperación

Es posible administrar medicación antiviral tan pronto como la persona acude al médico. El ritmo de crecimiento del virus no se ve afectado por la medicación, pero ésta, junto con la respuesta inmune, es capaz de eliminar 1,2 millones de partículas víricas por hora.

3. Si la persona desea recuperarse completamente, explique por qué para que la medicación resulte eficaz ésta ha de ser administrada antes de que el número de partículas víricas alcance entre 9 y 10 millones.

Al cuerpo le cuesta adaptarse a la medicación antiviral, por este motivo, inicialmente ésta debe introducirse en el cuerpo de forma cuidadosa, a lo largo de cuatro horas de administración intravenosa continuada. Esto significa que, durante estas primeras 4 horas, en cualquier instante de tiempo siempre está penetrando en el cuerpo la misma cantidad de medicación. Sin embargo, a su vez, los riñones eliminan, por hora, aproximadamente el 2,5% de esta medicación. El doctor ha calculado que el paciente necesita al menos 90 microgramos de medicación para comenzar y luego mantener la tasa de eliminación de 1,2 millones de partículas víricas.

(sigue en la página siguiente)

4. Cree el modelo matemático para este período de cuatro horas, de forma que al finalizar este período de cuatro horas el paciente tenga 90 microgramos de

medicación en su organismo. Halle analíticamente la solución a su modelo, o estime su solución con ayuda de medios tecnológicos.

Una vez que el nivel de medicación ha alcanzado los 90 microgramos., el paciente abandona la fase intravenosa para pasar a recibir inyecciones cada cuatro horas. Los riñones siguen trabajando para eliminar la medicación, por lo que el doctor ha de tener eso en cuenta a la hora de calcular la dosis adicional (D). La dosis D debería lograr mantener en mínimo de 90 microgramos de medicación en el torrente sanguíneo a lo largo de todo el tratamiento.

5. ¿Qué dosis D, administrada cada cuatro horas a partir de la finalización de la primera fase intravenosa continuada, lograría que el paciente tuviera siempre 90 microgramos de medicación en su organismo? No olvide tener también en cuenta la tasa de eliminación de los riñones. Explique detalladamente cómo obtuvo ese número.

6. Determine, cuándo, como muy tarde, debe iniciarse la administración de la medicación (contando a partir de la aparición de la infección) para evitar que el paciente muera. ¿Cuánto se tardará en eliminar del organismo del paciente la totalidad de partículas víricas? Muestre en un gráfica todo el tratamiento, desde el momento en que da comienzo hasta que se eliminan todas las partículas víricas.

Análisis de sus modelos

7. Analice todos sus modelos, incluyendo en su análisis todas las suposiciones que haya hecho, los puntos fuertes y débiles de los modelos, así como la fiabilidad de los resultados obtenidos.

Aplicación de su modelo

8. Explique cómo se podrían modificar sus modelos para utilizarlos en el caso de que el paciente no fuera un adulto sino un niño.