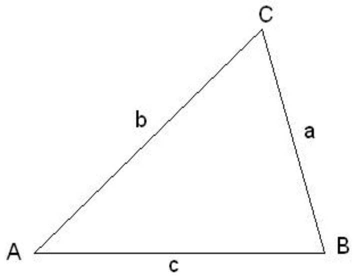
EL TRIÁNGULO

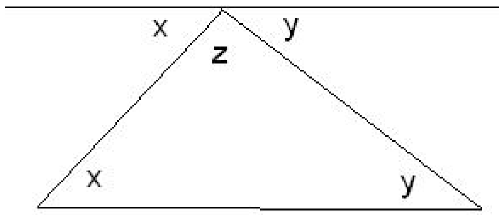
1. EL TRIÁNGULO. PRIMERAS PROPIEDADES

El triángulo es un polígono que tiene tres lados y tres ángulos. Es, por tanto, el polígono más simple y el conocimiento de sus características y propiedades nos ayudará a analizar los polígonos de más lados.

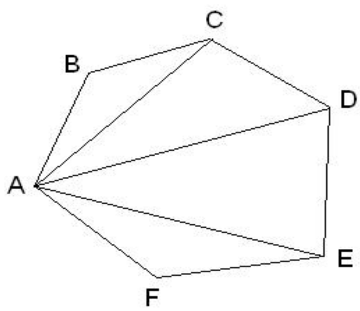


Recordemos algunas propiedades elementales de los triángulos

A) Los tres ángulos de un triángulo suman 180º como puede comprobarse con la figura siguiente



Como consecuencia de esta propiedad puede demostrarse fácilmente que los ángulos de un polígono de *n* lados suman $180º \cdot (n - 2)$



B) Un lado es menor que la suma de los otros dos.

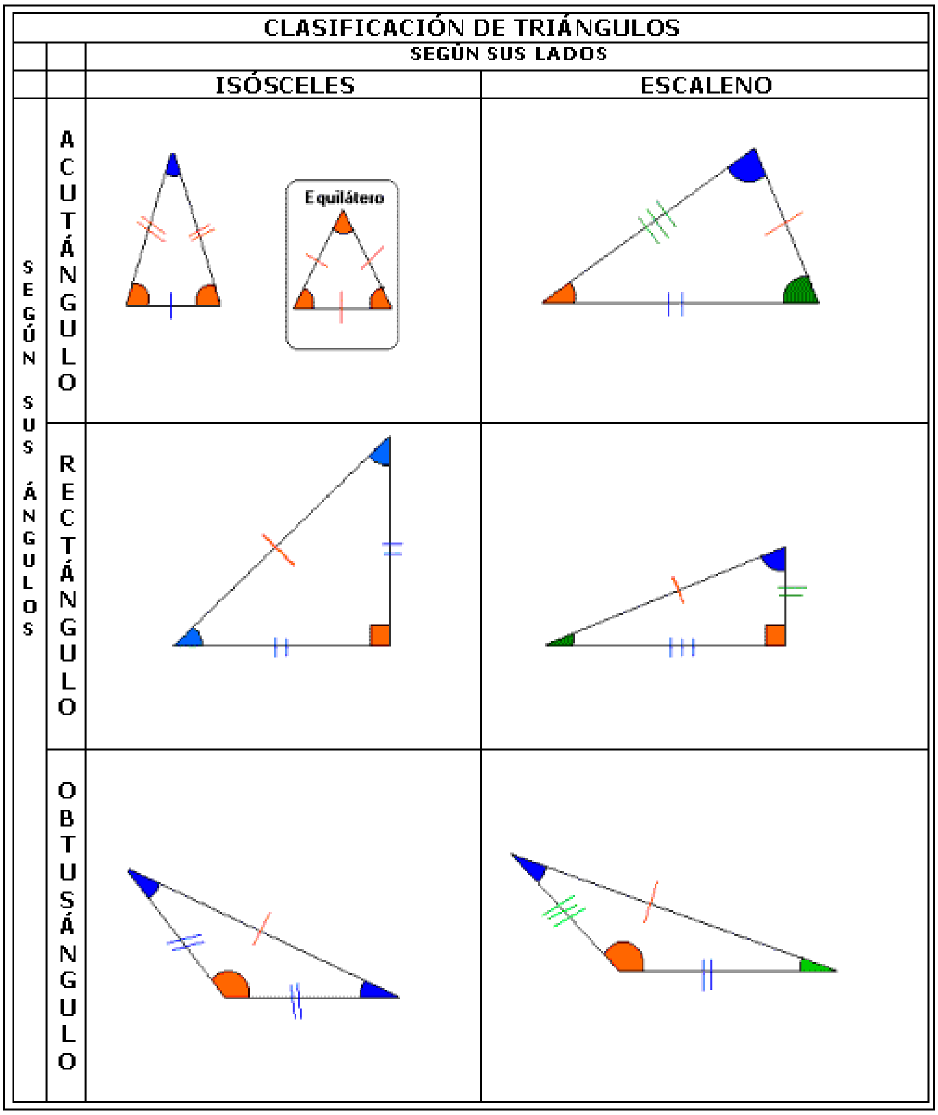
$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b$$

C) Dado un triángulo siempre existe una circunferencia circunscrita a él. Su centro, como ya sabéis, es el punto donde se cortan las mediatrices de los lados.

Por cierto, ¿todo cuadrilátero puede inscribirse en una circunferencia?. En caso de respuesta negativa, ¿qué condición debe cumplir el cuadrilátero para que exista una circunferencia que pase por los cuatro vértices del cuadrilátero?

2. ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO

El triángulo, como polígono que tiene tres lados y tres ángulos, se clasifica según sus lados y según sus ángulos.



Es decir:

Según sus lados:

Equilátero: Tres lados iguales.
Isósceles: Dos lados iguales y el tercero con otra medida.
Escaleno: Tres lados con distinta medida.

Según sus ángulos:

Rectángulo: Un ángulo recto.
Acutángulo: Tres ángulos agudos
Obtusángulo: Un ángulo obtuso

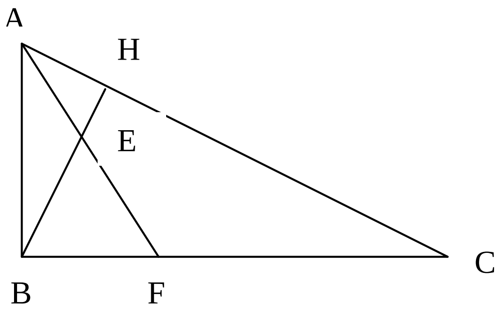
Problemas:

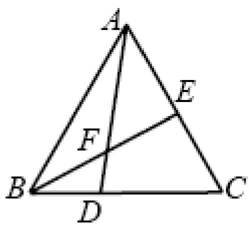
1.- ¿Qué ángulo forman dos diagonales de dos caras consecutivas de un cubo que se unen en un vértice?

2.- ¿Qué ángulo forman dos segmentos que unen el punto medio de una arista de un cubo y los puntos medios de otras dos aristas consecutivas de diferentes caras?

3.- Calcula el ángulo obtuso que forman las dos bisectrices interiores de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

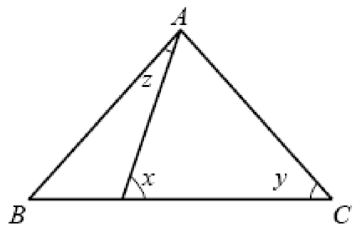
4.- En la figura AF es la bisectriz del ángulo A y BH la altura sobre la hipotenusa. Demuestra que el triángulo BEF es isósceles.



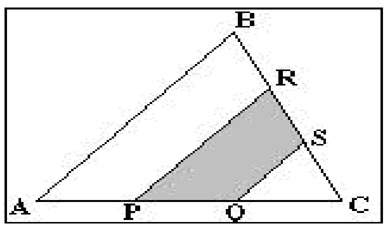


5.- El triangulo ABC de la figura es equilatero. Si el ángulo DAC=40º y el ángulo EBC=35º ¿Cuanto mide el ángulo DFE?

6,- Si AB=AC y z es un angulo agudo .Expresa el angulo z utilizando los ángulos x e y



El triángulo ABC de la figura tiene área 1 m2. Los puntos P, Q, R y S verifican que AP = PQ = QC y BR = RS = SC. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



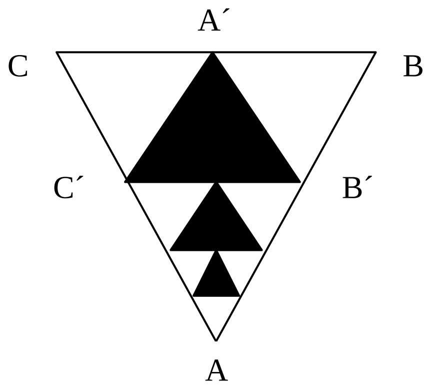
2.1 Área de un triángulo

El área del triángulo es consecuencia del área del paralelogramo, cuya área se deriva, a su vez, del área del rectángulo.

Area del Rectángulo = Largo x ancho = Producto de sus lados = Base x altura.
Area del Paralelogramo = Base x altura
Area del triángulo = $\frac{\text{Base x altura}}{2}$
Formula de HERON $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ siendo $p=\frac{a+b+c}{2}$

Problemas:

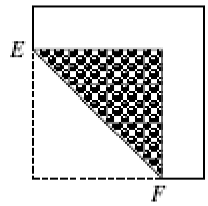
1.- Sea el triángulo equilátero ABC de área 1024 metros cuadrados. Uniendo los puntos medios se ha construido el triángulo A´B´C´. Del mismo modo se construye el A´´B´´C´´ y así sucesivamente.



Calcula:

a) El área del triángulo A´B´C´
b) La suma de las áreas de los tres primeros triángulos formados con el procedimiento que se ha explicado anteriormente.
c) El proceso puede ser infinito. ¿Cuánto suman las áreas de todos los triángulos que pueden formarse?

2) Una hoja cuadrada de papel de 12 cm^2 de área, es blanca por una cara y roja por la otra. Doblamos una esquina de la hoja formando un triángulo con dos lados paralelos a los lados de la hoja, como se muestra en la figura. Si ahora la superficie visible de la hoja es la mitad roja y la mitad blanca, ¿cuál es, en cm, la longitud del doblez EF?



3. TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo se cumple el teorema de Pitágoras que dice:

El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

En términos aritméticos puede expresarse: $a^2 + b^2 = c^2$.

Problemas:

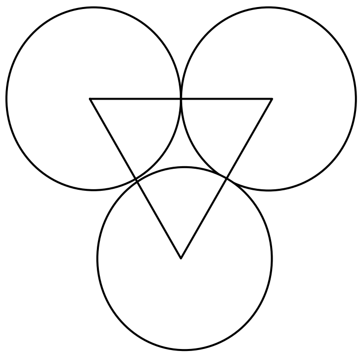
1.- Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 10 m.

2.- Comprueba que si un cateto de un triángulo rectángulo mide 2a y el otro mide (a^2-1), la hipotenusa mide (a^2+1), a >1.

3.- Las ternas de números 2a , (a^2-1) y (a^2+1) se llaman ternas pitagóricas. Calcula ternas pitagóricas con todos sus términos menores que 30.

4.- Di si el triángulo de lados 13, 10 y 7 es rectángulo acutángulo u obtusángulo.

5.- Calcula el área que queda entre las tres circunferencias sabiendo que tienen todas 10 cm de diámetro.



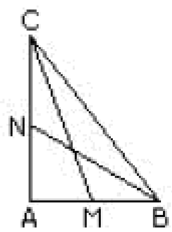
6.- A ambos lados de una calle hay dos árboles, uno frente al otro. Uno de 6 m y otro de 4m. La distancia entre ambos es de 10 m y en sus copas hay un pájaro en cada una. Descubren en el suelo un trozo de pan y se lanzan al mismo tiempo y con la misma velocidad alcanzando a la vez la comida. ¿A qué distancia de los árboles estaba el pan?

7.- En un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 5 cm, se traza la altura correspondiente a uno de los lados iguales y su longitud es 4 cm. Calcula el área del triángulo.

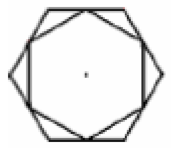
8.- Sea un cuadrado ABCD de lado 4 cm. Sobre el lado AB se construye un triángulo equilátero con el tercer vértice E en el interior del cuadrado. ¿Cuánto vale el área del triángulo BEC?, ¿y el DEC?

9- Las medianas trazadas desde los vértices de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo miden 5 y $\sqrt{40}$ cm. ¿Cuál es el valor de la hipotenusa?

ABC es un triángulo rectángulo en A. M y N son los puntos medios de los catetos AB y AC respectivamente. Si BN = 19 y CM = 22, la longitud de la hipotenusa BC es:



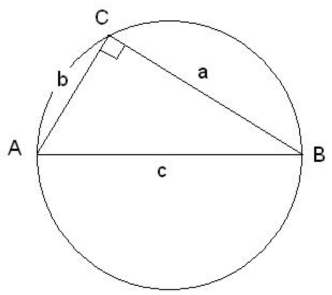
11.- El hexágono interior tiene sus vértices en los puntos medios del hexágono exterior. Si el grande tiene de área 20 cm^2, ¿cuál es, en cm^2, el área del pequeño?



12.- Sobre el lado AB de un cuadrado ABCD se dibuja exteriormente el triangulo rectangulo ABF, de hipotenusa AB. Se sabe que AF = 6, y que BF = 8. Llamamos E al centro del cuadrado. Calcula la longitud del segmento EF.

4. CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA A UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Sabemos que la medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco que abarcan sus lados. Por esta razón, si el triángulo es rectángulo, el arco que abarcan los dos catetos es de 180º



Por tanto, se cumplirá:

a) La hipotenusa es el diámetro de la circunferencia.
b) El triángulo rectángulo de mayor área cuya hipotenusa mide c es el isósceles de base c.
c) La mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de la hipotenusa.

Problemas:

1.- Se dan dos puntos A y B. Sea r una recta que pasa por A y sea P el pie de la perpendicular desde B a la recta r. ¿Qué figura forman los puntos P al ir considerando todas las rectas que pasan por A?

2.- Los tres lados de un triángulo miden 10, 24 y 26 cm. Calcula la longitud de las tres alturas y de las tres medianas.

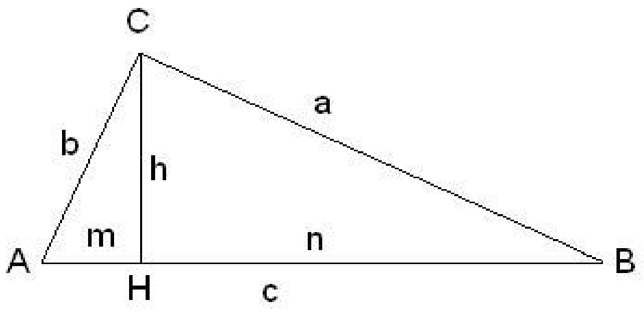
5. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.

Aplicando el hecho de que los lados de dos triángulos semejantes son proporcionales se demuestran algunos de los teoremas más útiles a la hora de resolver problemas sobre triángulos.

TEOREMA DE LA PARALELA MEDIA. Si unimos los puntos medios de dos lados de un triángulo resulta un segmento que es paralelo al tercer lado y mide la mitad que él.

Para triángulos rectángulos tenemos que:



La altura relativa a la hipotenusa, CH, divide al triángulo ABC en otros dos triángulos ACH y CBH rectángulos y semejantes entre sí y además se cumple que el triángulo ABC es también semejante a los triángulos ACH y a CBH. Esta semejanza de triángulos conduce a dos teoremas

TEOREMA DEL CATETO. Todo cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella:

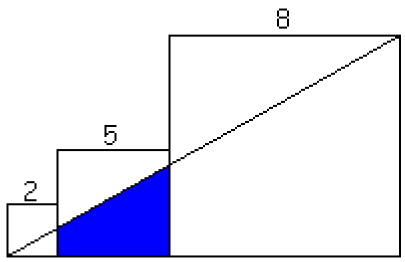
$$\frac{a}{c}=\frac{n}{a} \qquad \frac{b}{c}=\frac{m}{b}$$

TEOREMA DE LA ALTURA. La altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos que determina su pie sobre la hipotenusa:

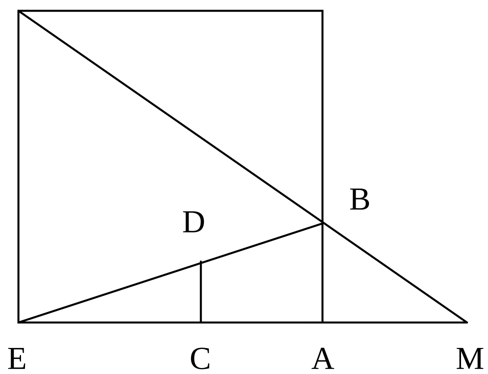
$$\frac{h}{n}=\frac{m}{h}$$

Problemas:

1.- Calcula el área sombreada en la figura siguiente:



2.- ¿A qué distancia de A está situado el punto M si se sabe que la distancia entre E y C es de 8 cm, entre C y A es de 5 cm y entre D y C es de 2 cm?



3.- Calcula la longitud del lado de un cuadrado inscrito en un triángulo equilátero de lado 8 cm.

4.- En un triángulo se traza su paralela media y se desea saber la razón entre las áreas del trapecio y del pequeño triángulo en que queda descompuesto el triángulo dado.

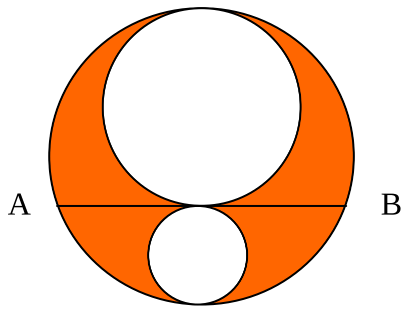
5.- Dos segmentos verticales de 20 y 80 cm están separados por 1 m. ¿A qué altura del suelo está el punto de intersección de las rectas que unen los puntos más altos de cada segmento con los más bajos del otro segmento?

6.- Dibuja un rectángulo ABCD. Las perpendiculares trazadas desde los vértices B y D a la diagonal AC divide a ésta en 3 segmentos iguales, que miden 5 cm. Calcula los lados del rectángulo.

7.- En una circunferencia cuyo radio mide 10 cm hay trazado un diámetro AB. La proyección de una cuerda AM sobre él mide 4 cm. Calcula la longitud MB

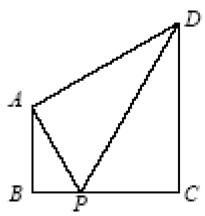
8.- Sea un triángulo cualquiera ABC y P un punto del plano (puede ser interior o exterior al triángulo). Sea N el punto simétrico de P respecto del punto medio del lado AC y M el simétrico de P respecto del punto medio del lado BC. Demuestra que el cuadrilátero ABMN es un paralelogramo.

9.- En la figura siguiente:



calcula la distancia entre A y B sabiendo que el área oscura es igual a 2π cm^2

10 Los tres triángulos de la figura son rectángulos y semejantes. Si el triángulo ABP tiene de área 12 cm^2, calcula el área del trapecio ABCD



6. PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

BARICENTRO: Punto de corte de tres las medianas.

El baricentro es el centro de gravedad del triángulo.
La distancia del baricentro G al vértice correspondiente es 2/3 de la longitud de la mediana.

INCENTRO: Punto de corte de las tres bisectrices de los ángulos del triángulo.

El incentro es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.
El radio de la circunferencia inscrita es igual al área del triangulo dividida por el semiperímetro del triangulo ¿Demostracion?

CIRCUNCENTRO. Punto de corte de las tres mediatrices de los lados del triángulo.

El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita.

Problemas:
1.- Demuestra que el lado de un triángulo equilátero en función del radio de su círculo circunscrito viene dado por $r\sqrt{3}$ y respecto del radio de su círculo inscrito es $2r\sqrt{3}$.

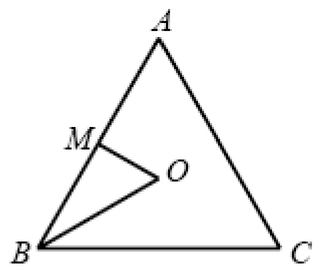
2.- Los catetos de un triángulo rectángulo miden 21 y 28 cm. Calcula las longitudes de los segmentos que la bisectriz interior del ángulo recto divide a la hipotenusa.

3.- Los lados de un triángulo miden $a = 4$ cm, $b = 6$cm y $c = 8$cm. Calcula los segmentos que la bisectriz interior del ángulo C determina sobre el lado c.

4.- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 cm y el radio de la circunferencia inscrita mide 1 cm. ¿Cuál es el perímetro del triángulo?

5.- ¿Cuál es el radio de la circunferencia inscrita al triángulo de lados 8, 15 y 17 cm?

6.- El triángulo equilátero ABC tiene 24 cm de perímetro. O es el centro del triángulo y M el punto medio del lado AB. ¿Cuál es, en cm, el perímetro del triángulo BOM?



7.- Halla el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo de perímetro 30 cm y área 30 cm^2.

8.- ¿Cuál es, en cm^2, el área del círculo circunscrito al triángulo isósceles de lados 3, 3 y 2 cm?