ESTALMAT

CASTILLA Y LEÓN

ESTUDIO GEOMÉTRICO DE FORMAS ESTRELLADAS

VALLADOLID – 11/12/2010

Inmaculada Fernández Benito

OBJETIVOS

• Construir, por diferentes métodos, figuras con forma de estrella a partir de un n-polígono regular.

• Utilizar la notación de *Schläfli* (n/q) y relacionar las propiedades de divisibilidad numérica de **n** y **q** con las propiedades geométricas de las estrellas o polígonos estrellados denotados.

• Estudiar los polígonos cóncavos derivados de las construcciones anteriores y sus propiedades geométricas.

• Analizar posibles trazados e interpretaciones de éstas y otras formas estrelladas.

• Aplicar los modelos estudiados a ejemplos del entorno cotidiano y artístico.

UNIDAD DIDÁCTICA

- NIVEL: 2
- Nº SESIONES: 3 - 4
- MATERIAL: Fotocopias, pinturas, regla
- ORDENADORES: Cabri o GeoGebra

REPASO POLÍGONOS

- Polígonos cóncavos y convexos.
- Polígonos regulares e irregulares.
- Elementos de un polígono: lado, vértice, ángulo (interior, central), diagonal, radio, apotema.

			Polígonos regulares	
Nº de lados	Nº de diagonales	Suma de ángulos interiores	**Ángulo central**	**Ángulo interior**
3				
4				
5				
6				
8				
n				

FOTOCOPIAS CON POLÍGONOS REGULARES

Dibuja segmentos uniendo vértices de los polígonos regulares con las siguientes reglas:

1.- Siempre “salta” el mismo número de vértices

2.- Repite el proceso hasta que todos los vértices estén conectados.

Realiza nuevos trazados siguiendo las pautas anteriores pero cambiando el “salto”.

FOTOCOPIAS

CONSTRUCCIÓN 1ª

A partir de un polígono regular de **n** lados. Se elige uno de sus vértices y, a partir de él, se trazan segmentos que unen dos vértices no consecutivos. Este trazado se realiza de manera ordenada y sistemática, dejando sin unir en cada paso el mismo número de vértices.

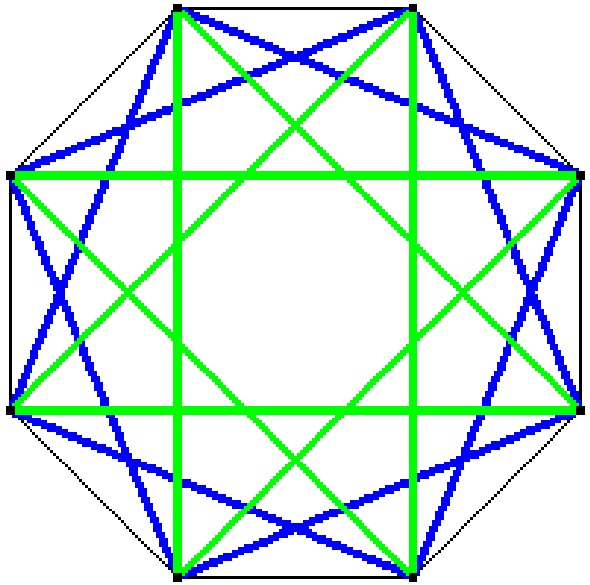
Estrella es la figura obtenida cuando todos los vértices del polígono inicial están conectados.

Una estrella así construida se denota por **n/q** (notación de *Schläfli*).

n es el número de vértices del polígono regular del que procede y **q-1** es el número de vértices que se dejan sin unir en cada paso o también, **q** es el número de lados que se "saltan".

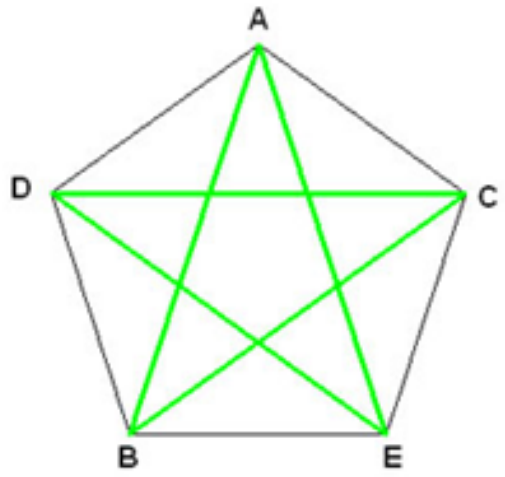
8/2

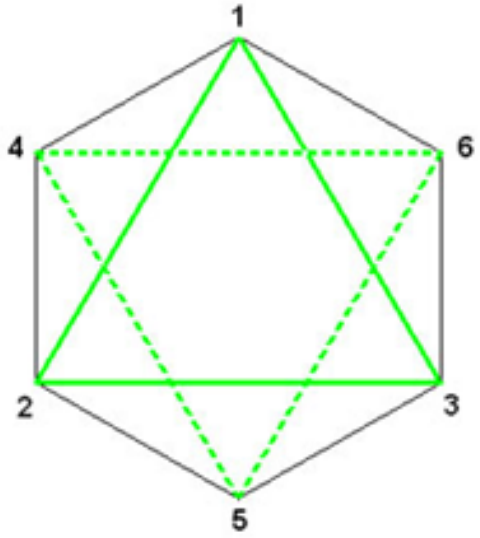
8/3



Por ejemplo, para el pentágono y el hexágono regular construimos las estrellas 5/2 y 6/2.

Observa que la estrella 5/2 es un único polígono, se llama **polígono estrellado** (su trazado se recorre en una sola vez) ¿Qué ocurre en el caso de la estrella 6/2?



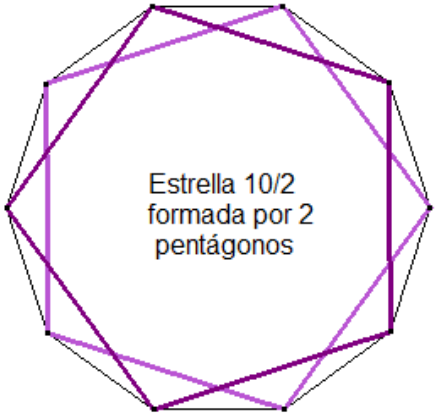


Utiliza el programa CABRI GÉOMÈTRE para dibujar los siguientes polígonos regulares y las estrellas indicadas:

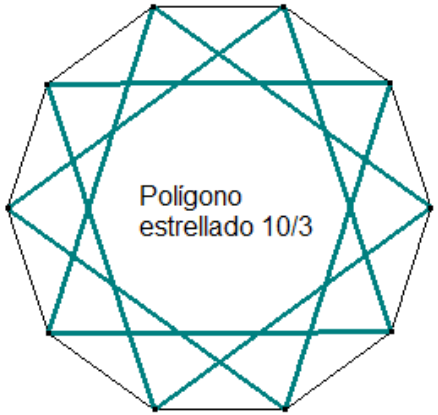
a) Octógono: 8/2, 8/3, 8/4 y 8/5

b) Eneágono: 9/2, 9/3 9/4 y 9/7

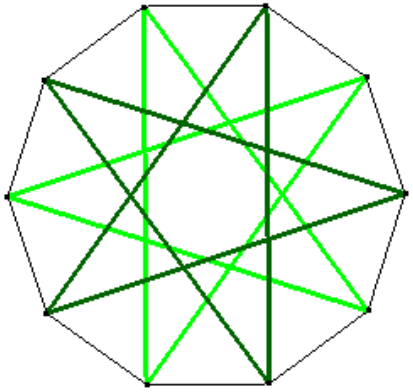
c) Decágono: 10/2, 10/3, 10/4 y 10/5.



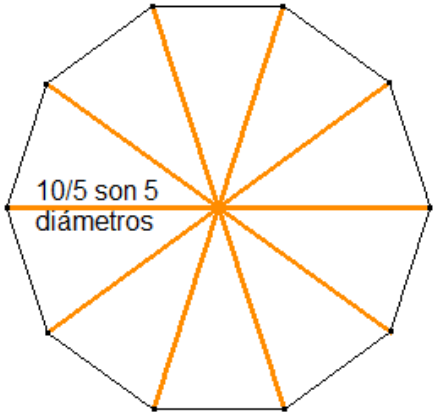
Estrella 10/2 formada por 2 pentágonos



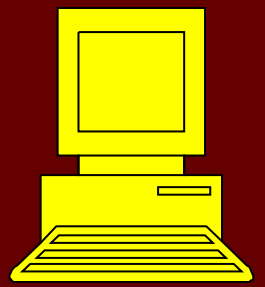
Polígono estrellado 10/3



Estrella 10/4 formada por 2 polígonos estrellados 5/2



10/5 son 5 diámetros



- A la vista de las construcciones anteriores contesta a las siguientes preguntas:

1) ¿Qué es **n/1**? **El polígono regular de n lados**

2) ¿Qué ocurre si **n** es par y **q = n:2**? **n/q** son **q** diámetros del polígono: **Ejemplos: 10/5 8/4 6/3…**

3) ¿Qué relación hay entre las estrellas **n/q** y **n/n-q**?
¿Cuántas estrellas diferentes se pueden construir a partir de un polígono de **n** lados? **Solución**

4) ¿Cómo deben ser los números **n** y **q** para que la estrella sea un polígono estrellado? **Deben ser números primos entre sí**

5) ¿Qué ocurre si **q** es un divisor de **n**?
¿Cuántos polígonos regulares forman la estrella?
¿Qué polígonos son? **Solución**

6) ¿Qué se obtiene si **n** no divide a **q** pero ambos tienen divisores comunes? Explícalo para 10/4, 15/6. Generaliza las deducciones siendo **d** el máximo común divisor de **n** y **q**. **Solución**

n/q y n/n-q son figuras congruentes con distinta orientación.

Por ejemplo:

8/3 es equivalente a 8/5 y 8/2 es equivalente a 8/6

9/2 es equivalente a 9/7 o 9/3 es equivalente a 9/6

En principio 1≤q≤n-1.

8/1 8/2 8/3 8/4 8/5 8/6 8/7 ⟶ 8/2 8/3

9/1 9/2 9/3 9/4 9/5 9/6 9/7 9/8 ⟶ 9/2 9/3 9/4

- Si **n es par** hay $\frac{n}{2}-2$ figuras diferentes

- Si **n es impar** hay $\frac{n+1}{2}-2$ figuras diferentes

- Estrella formada por polígonos regulares entrelazados
- Ejemplos:

  6/2 son dos triángulos

  8/2 son dos cuadrados

  9/3 son tres triángulos

  10/2 son dos pentágonos

  12/4 son cuatro triángulos

En general si **n:q=c** . Se obtienen **q** polígonos regulares de **c** lados

Indicar sin trazarlos qué y cuántos polígonos regulares componen las estrellas; 16/4, 20/5, 30/6….

Ejemplos:

10/4 son dos polígonos estrellados 5/2

15/6 son tres polígonos estrellados 5/2

20/6 son dos polígonos estrellados 10/3

25/10 son cinco polígonos estrellados 5/2

En general si d=mcd (n,q). Se obtienen d polígonos estrellados del tipo

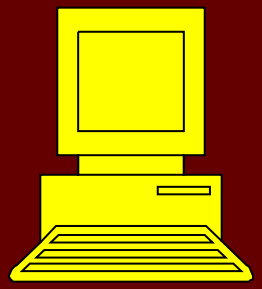
(n:d)/(q:d)

Trabajando con fracciones: $n = d \cdot n' \quad q = d \cdot q' \qquad \frac{n}{q} = \frac{d \cdot n'}{d \cdot q'} = \frac{n'}{q'}$

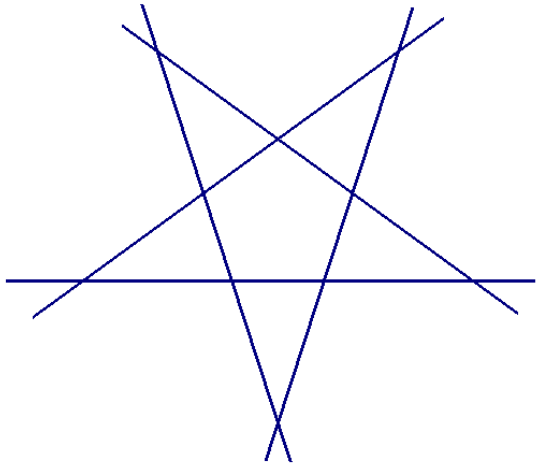
n'/q' corresponde a un polígono estrellado puesto que n' y q' son primos entre sí (fracción irreducible)

CONSTRUCCIÓN 2ª

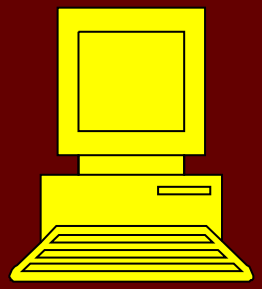
A partir de un polígono regular de **n** lados. Se prolongan sus lados hasta que las rectas que los contienen se corten por última vez. En este proceso se llama **estrella** a la figura que se obtiene en cada intersección de las prolongaciones de los lados del polígono. En el dibujo se ha obtenido el polígono estrellado 5/2 prolongando los lados de un pentágono regular.



FOTOCOPIAS

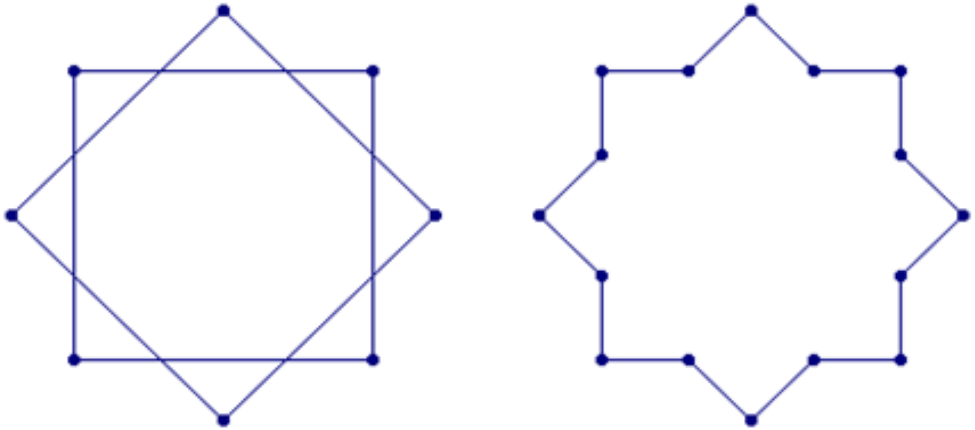


- Construye utilizando este método las estrellas 8/2 y 8/3 a partir de un octógono regular. Dibuja los polígonos regulares (octógonos) circunscritos a las estrellas anteriores. Observa que las estrellas aparecen construidas uniendo los vértices de los octógonos como en el primer método. Utiliza el programa CABRI.
- Puedes repetir todo el proceso con los octógonos exteriores para obtener un bonito diseño de entrelazados.

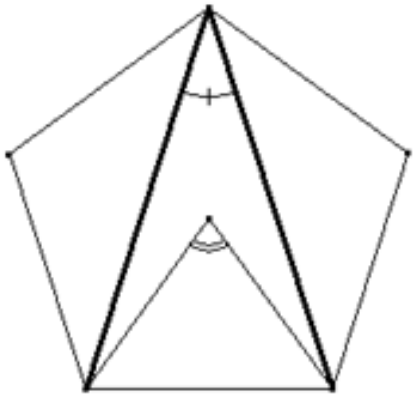


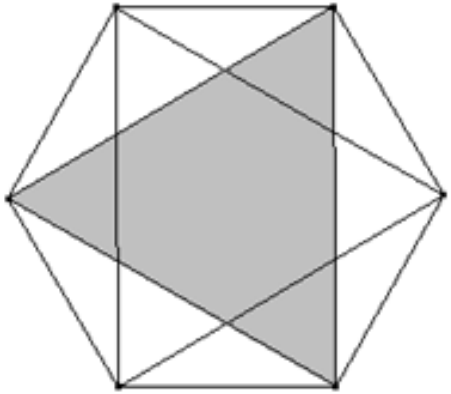
POLÍGONOS CÓNCAVOS CON FORMA DE ESTRELLA

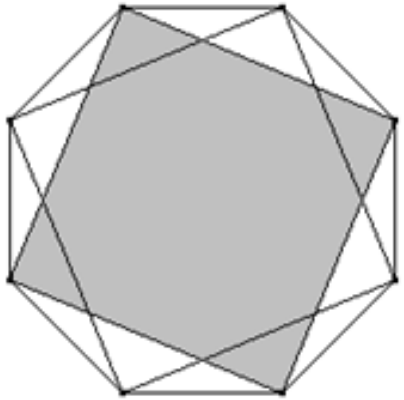
Resaltando el contorno de una estrella **n/q**, se construye un polígono cóncavo de **2n** lados que se denota por **|n/q|**. Observa la estrella 8/2 y el polígono cóncavo |8/2| de dieciséis lados con ángulos de dos tipos en sus vértices.

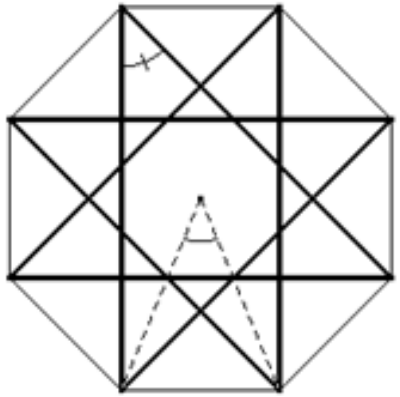


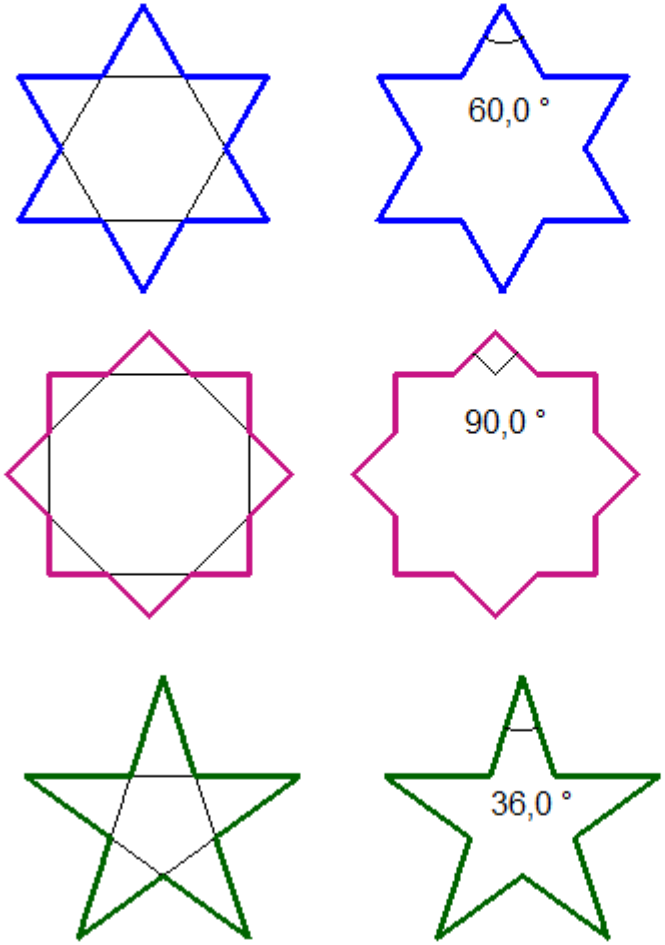
Considera los polígonos estrellados o estrellas, 5/2, 6/2 y 8/3 y a partir de ellos, los polígonos cóncavos con forma de estrella que tienen respectivamente 10, 12, 16 lados. ¿Cuánto miden los ángulos en los vértices de cada una de estos polígonos? Comprueba tus respuestas utilizando el programa CABRI.

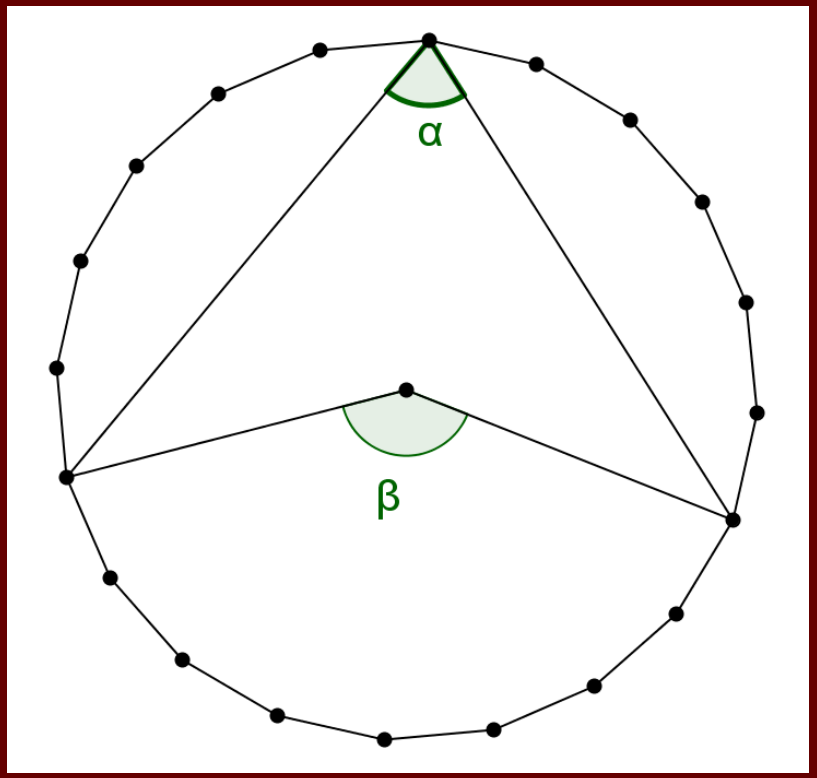









60,0 °
90,0 °
36,0 °

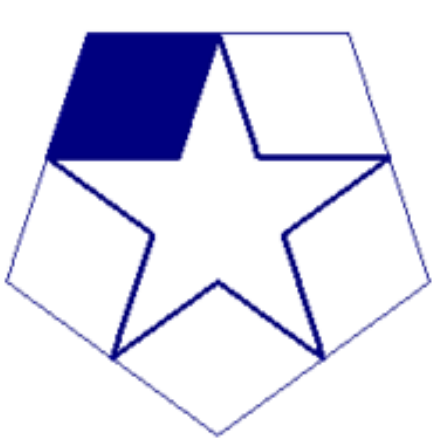


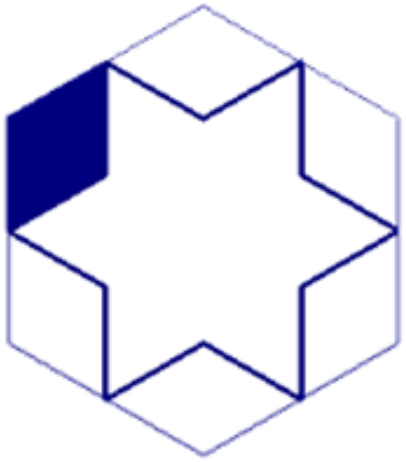
Nº de lados	Ángulo central
5	72^o
6	60^o
8	45^o
9	40^o
n	$\frac{360^o}{n} = \frac{2\pi}{n}$

$$\beta = (n - 2q) \cdot \frac{2\pi}{n}$$

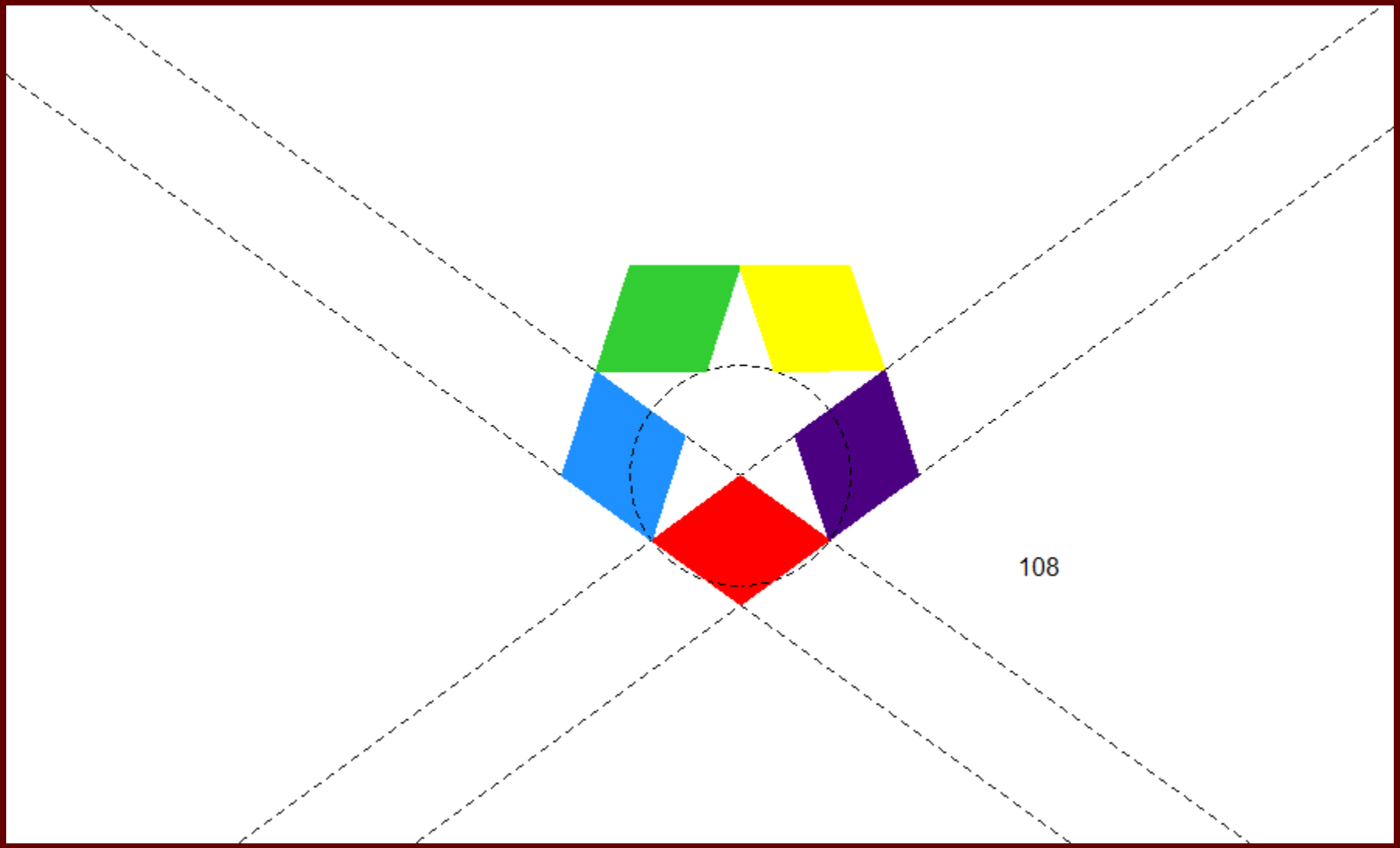
$$\alpha = \frac{n - 2q}{n} \cdot \pi$$

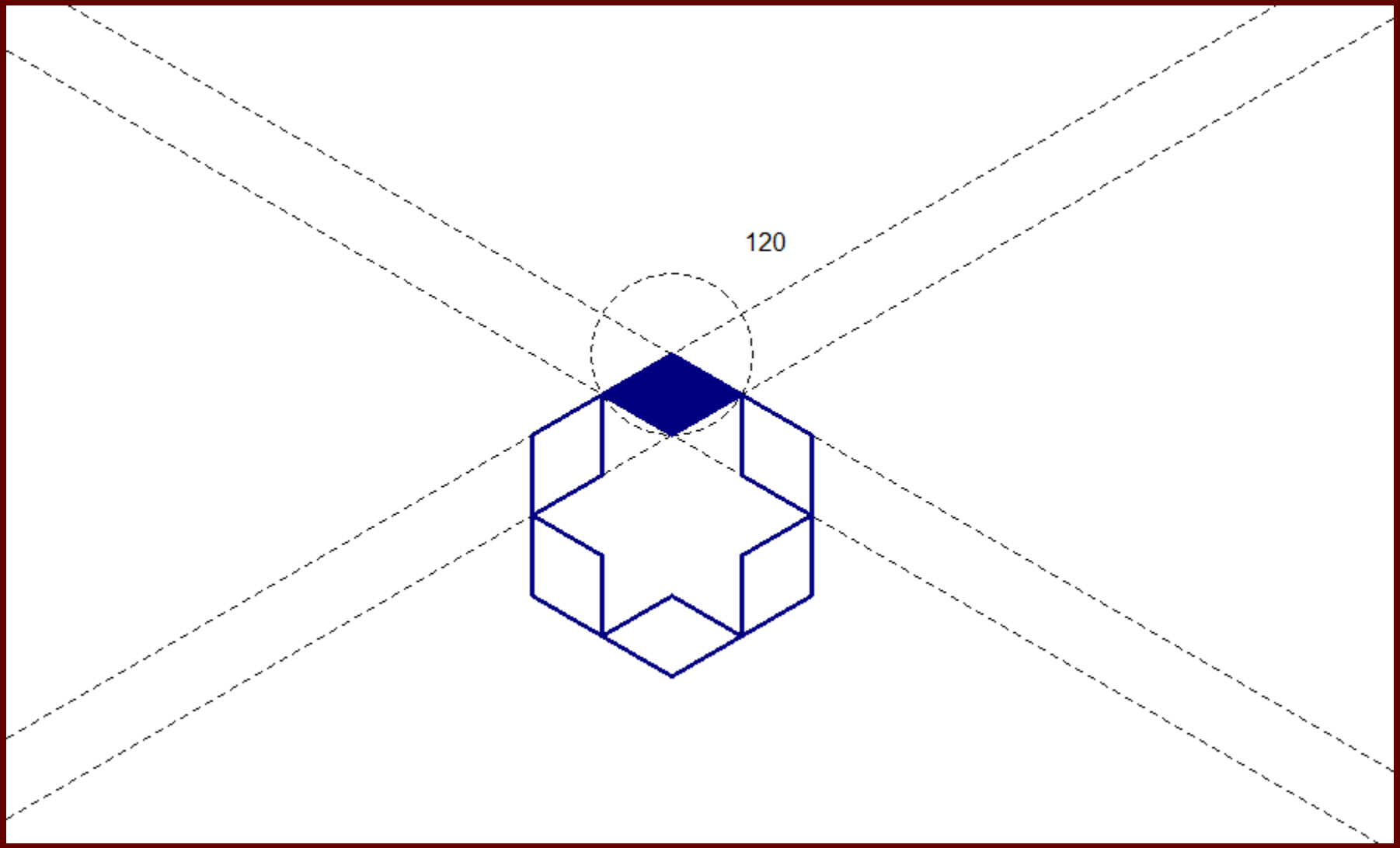
En el dibujo aparecen los polígonos cóncavos |5/2| y |6/2| construidos a partir de rombos que giran.

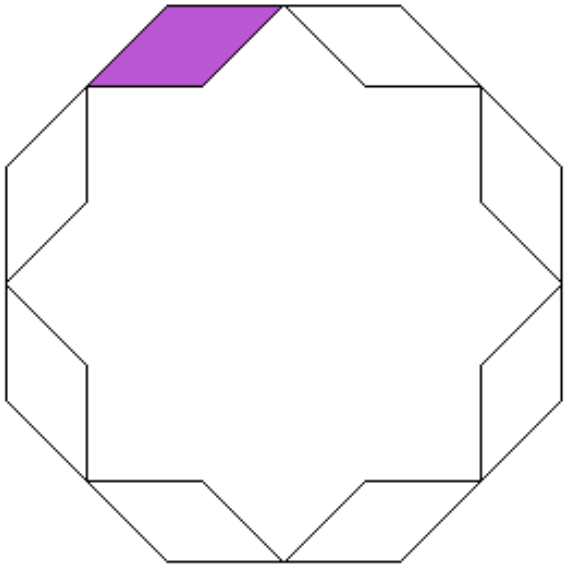




¿Cuánto miden los ángulos de los rombos? ¿Cuáles son los ángulos de giro en cada caso?

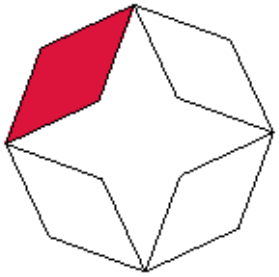

108


120



En el dibujo aparecen exteriormente dos octógonos regulares e interiormente dos estrellas, la de la parte izquierda es la estrella |8/2|, en ambos casos las figuras se han generado a partir de un rombo y sucesivos giros del mismo. Contesta a las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las medidas de los ángulos del rombo generador?
- ¿Cuál es el ángulo de giro en cada una de las dos figuras? ¿Cuántos giros hay que hacer en cada caso?
- ¿Cuánto miden los lados de los octógonos exteriores y de las estrellas interiores, si el lado del rombo inicial mide una unidad?

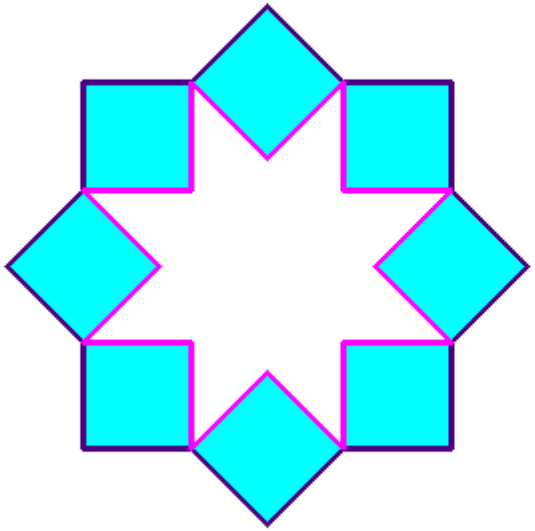


Generaliza para llegar a la conclusión siguiente:
Girando n veces un rombo de ángulos ρ y $\mu = \pi - \rho$, se obtiene la estrella |n/2|, siendo ρ el ángulo interior del n-polígono regular.

En la figura aparecen la forma |8/2| exteriormente y la |8/3| en el interior.

- Comprobar, por ejemplo utilizando el programa CABRI, que un cuadrado girado alrededor de uno de sus vértices, genera las dos estrellas |8/2| y |8/3| derivadas del octógono regular. ¿Cuál es el ángulo de giro?
- Hallar las áreas de los octógonos interior y exterior de la figura y la razón entre ellas.
- Observa que las dos estrellas |8/2| y |8/3| tienen el mismo perímetro y diferente área.
- Comprueba que la proporción entre sus áreas es el número de plata $\theta = 1 + \sqrt{2}$. (Solución positiva de la ecuación $x^2 = 2x + 1$.)

135



Perímetro = 22,63 cm

Área = 27,31 cm^2

Perímetro = 22,63 cm

Área = 11,31 cm^2

Área/Área = 2,41

ACTIVIDAD.- Observa la fotografía y contesta a las siguientes preguntas:

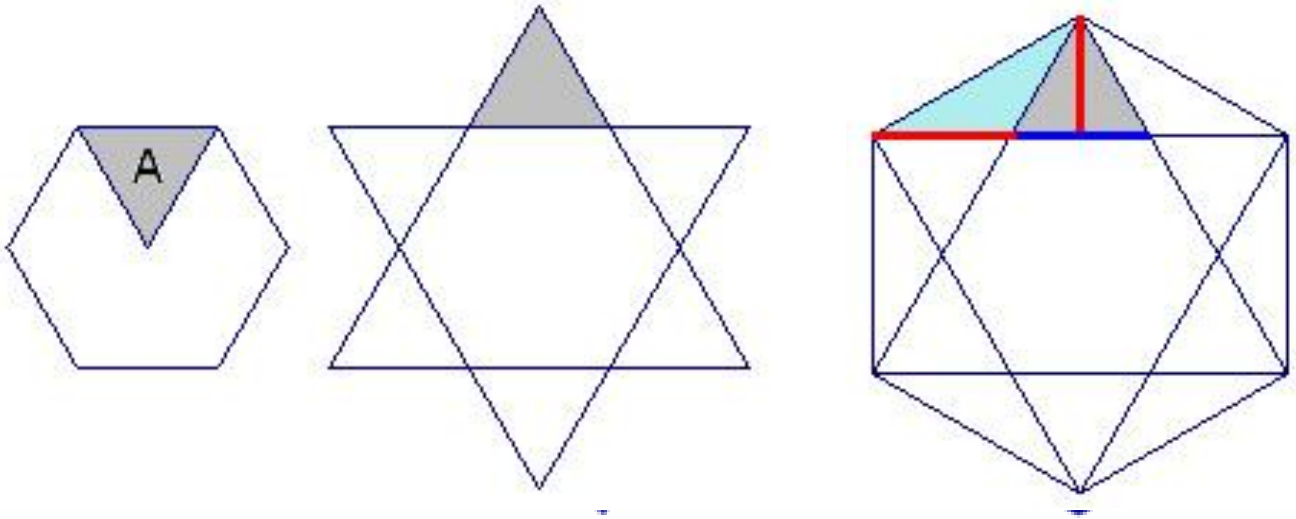
- Describe los polígonos convexos, estrellas, polígonos estrellados y polígonos cóncavos que aparecen.

- Observa que el octógono central motivo de la figura. Verifica que las prolongaciones de sus lados originan las estrellas 8/2 y 8/3.

- Suponiendo que la medida del lado del octógono interior es una unidad, calcular las áreas de los diferentes tipos de triángulos que aparecen.

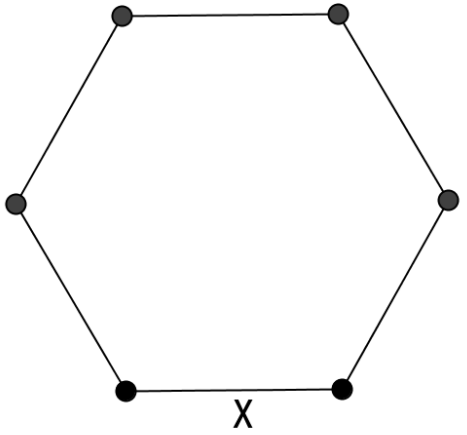
ACTIVIDAD.- Utilizando que el área del triángulo equilátero sombreado es A, contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el área del hexágono de la izquierda?
- ¿Cuál es el área de la estrella central?
- ¿Cuál es el área del hexágono circunscrito?



Tomando el lado del hexágono regular de partida es **x**, calcula las áreas de las figuras de la actividad anterior.

El hexágono de lado **x** se puede dividir en 6 triángulos equiláteros de altura $\frac{\sqrt{3}}{2}x$.



Por lo tanto las áreas son:

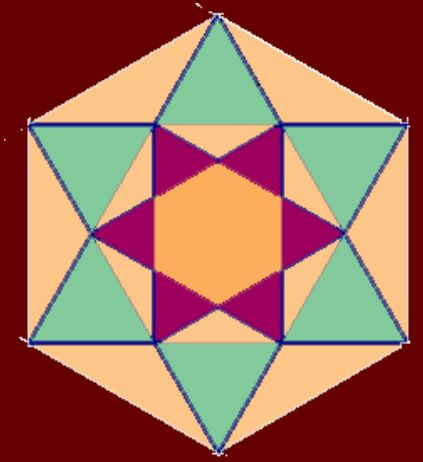
$$A_H = \frac{6x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

$$\text{Área hexagrama} = 2.A_H = 3\sqrt{3}\,x^2$$

$$A_{H'} = 3 \cdot A_H = \frac{9\sqrt{3}}{2}x^2$$

Observa la fotografía y el detalle de los hexagramas descompuestos en triángulos y la sucesión de hexágonos concéntricos.

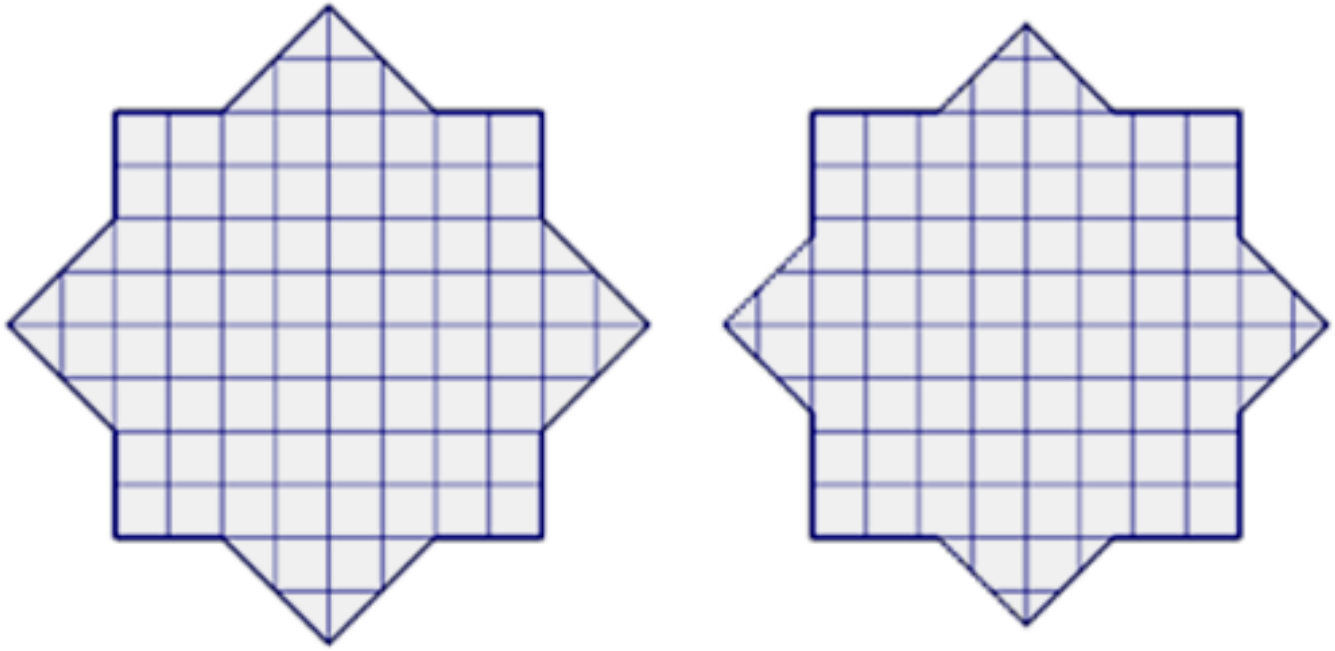
Calcula las áreas de los hexágonos e la sucesión.



$$A_{H''} = 3A_{H'} = 9A_{H}$$

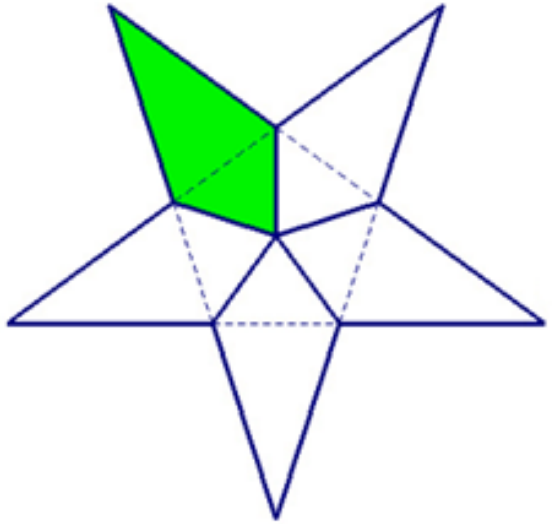
$$A_{H''} = 9\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 = \frac{27\sqrt{3}}{2}x^2$$

De las formas estrelladas de la figura identifica la que es derivada de la estrella 8/2, ¿cómo se ha construido la otra estrella? ¿Calcula el área y el perímetro de cada una?



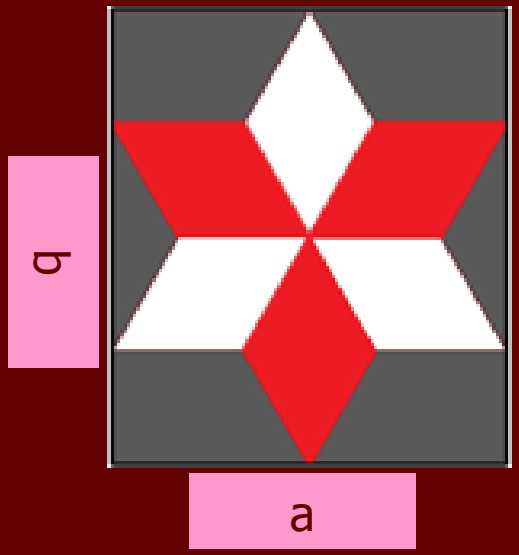
Otra forma de obtener figuras estrelladas es formar cuadriláteros a partir de un polígono estrellado o de una estrella (ver dibujo). Se obtiene una forma estrellada formada por **n** cuadriláteros.

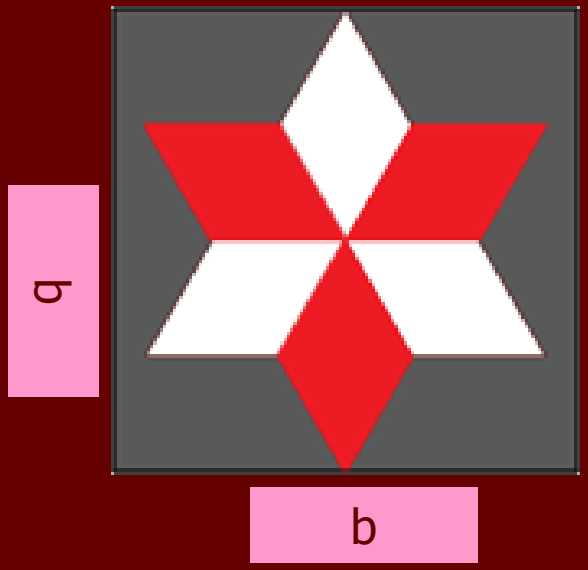
Observa las formas estrelladas de las fotografías e indica de qué polígonos estrellados o estrellas proceden y calcula la medida de los ángulos de los cuadriláteros.



En la fotografía hay una forma estrellada compuesta por seis rombos, generada a partir de un hexágono regular y de su estrella |6/2|.

Calcula las dimensiones y el área del rectángulo y del cuadrado más pequeños que se pueden circunscribir a la forma estrellada.





Si el lado del hexágono regular es L

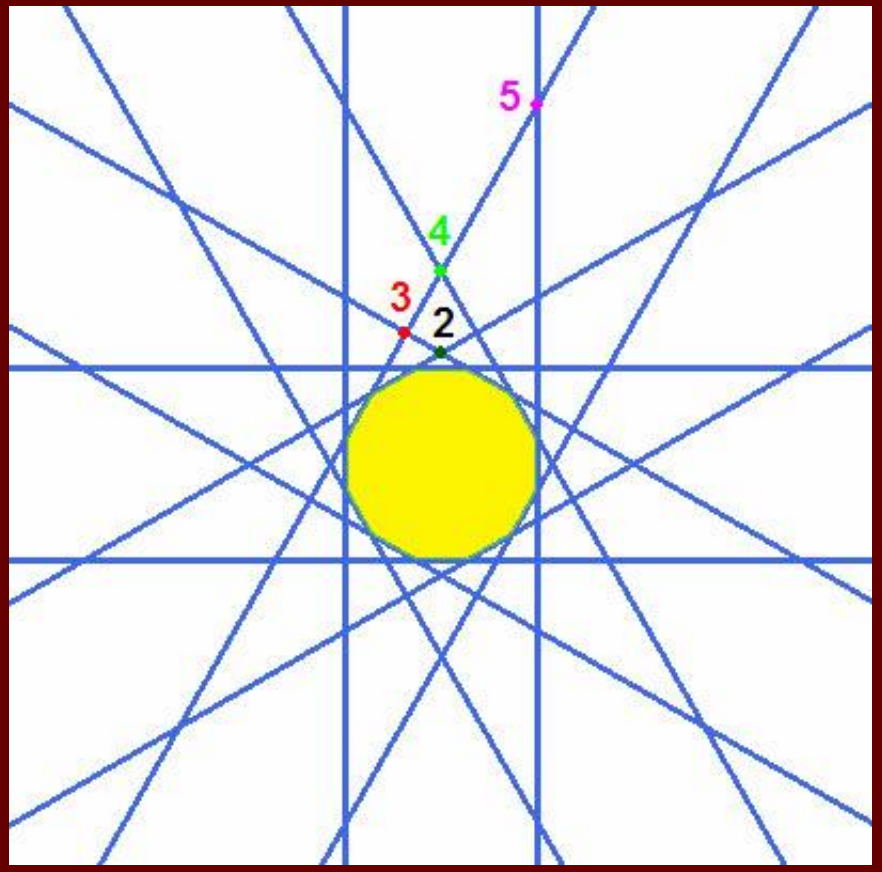
Los lados del rectángulo son: $a = 3L \quad b = 4\frac{\sqrt{3}}{2}L = 2\sqrt{3}L$

El lado del cuadrado es: $b = 2\sqrt{3}L$

GeoGebra
Dynamic Mathematics for Everyone

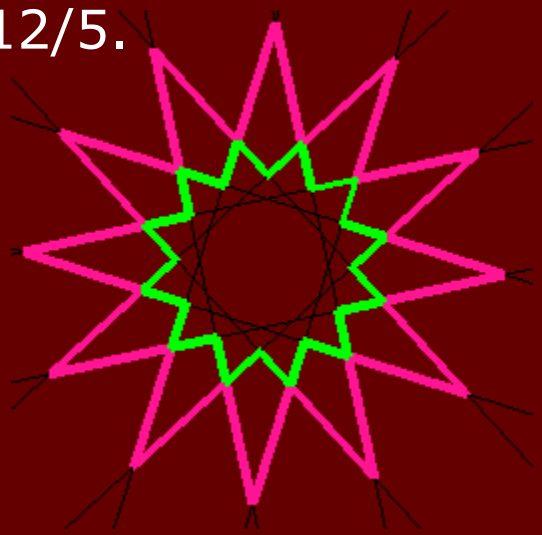
Polígonos estrellados y estrellas

Las estrellas y el polígono estrellado derivados del dodecágono son : 12/2, 12/3, 12/4 y 12/5.



Polígonos estrellados y estrellas

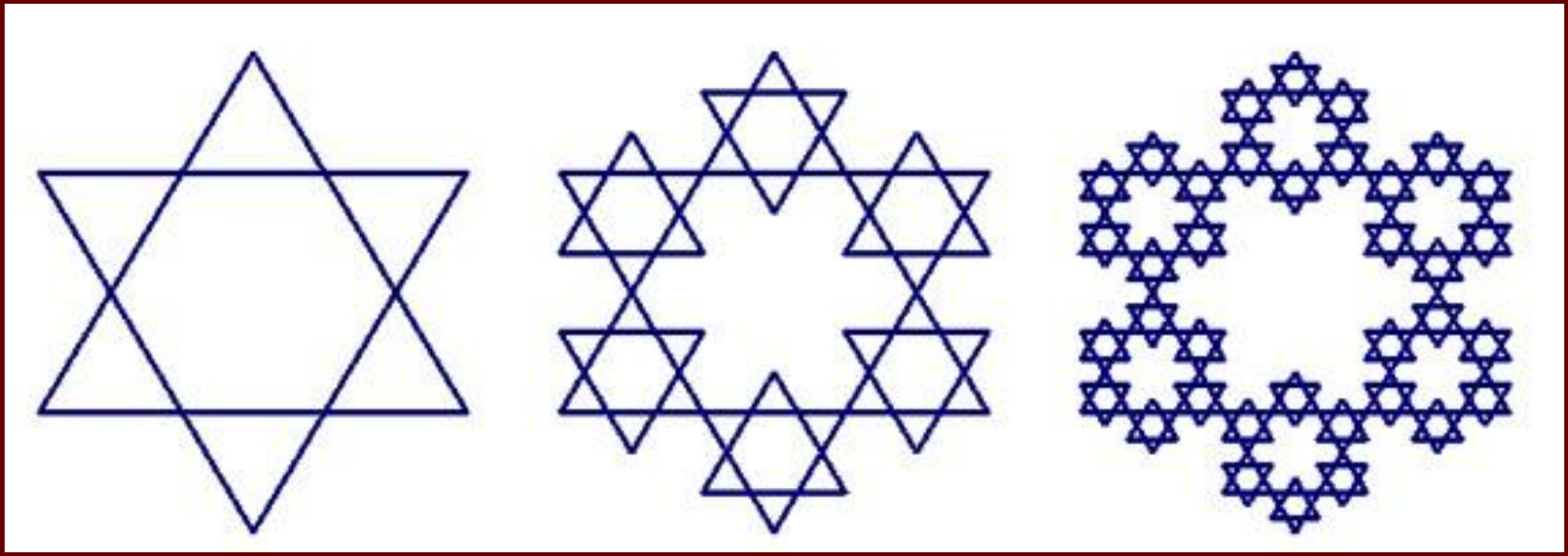
El círculo central oculta las estrellas denotadas por 12/2 y 12/3 simulando el centro de un sol cuyos radios corresponden a los segmentos de las estrellas 12/4 y 12/5.



"El Capricho" de Gaudí
COMILLAS

Hexagrama

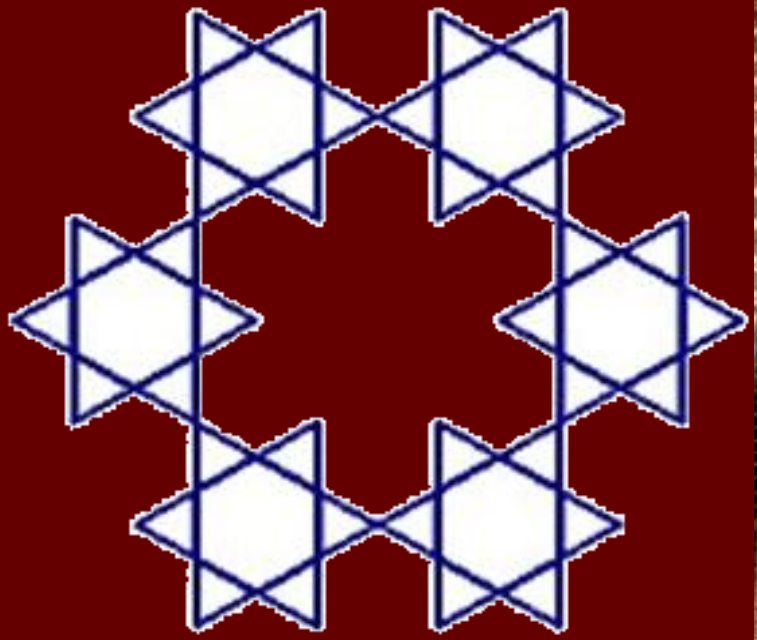
FACTAL DE HEXAGRAMAS



FRACTAL – AUTOSEMEJANZA

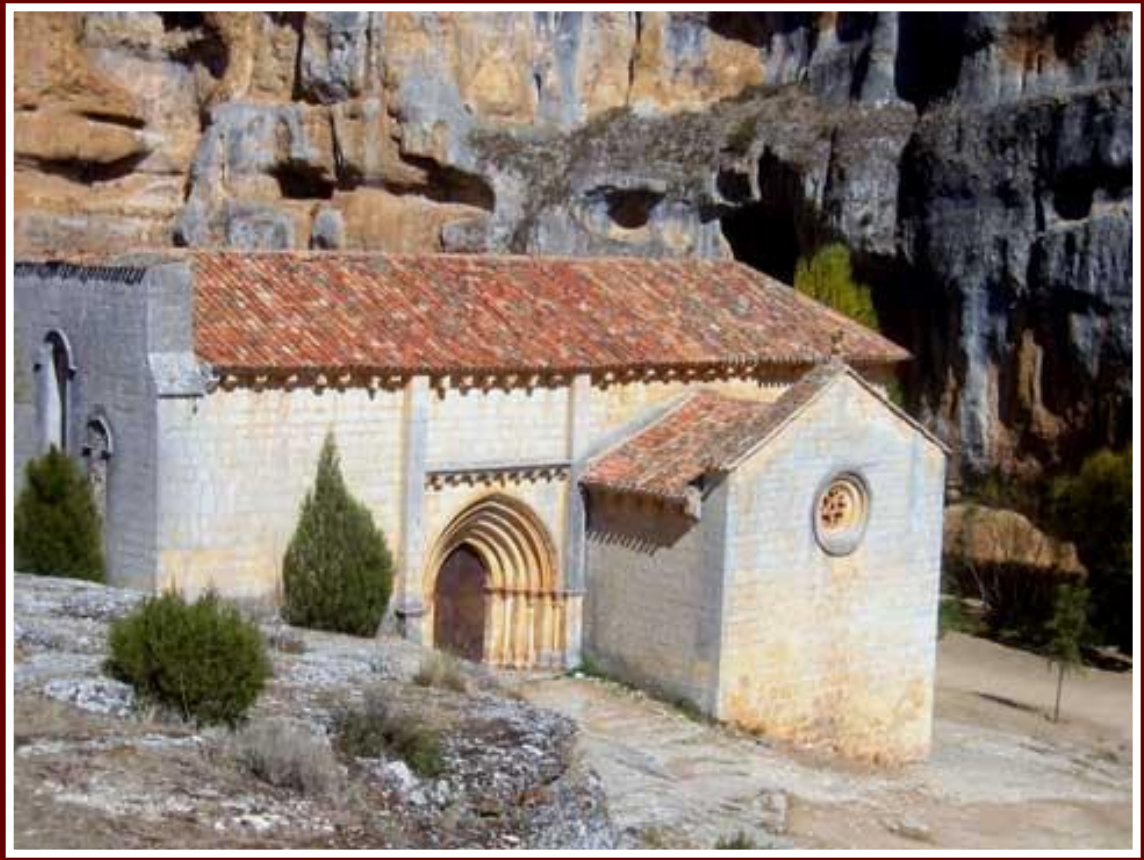
Una parte es réplica a menor escala del total.

Hexagrama



Mosaico - Sinagoga
PRAGA

Pentalfa o Pentagrama



Es el polígono estrellado 5/2.

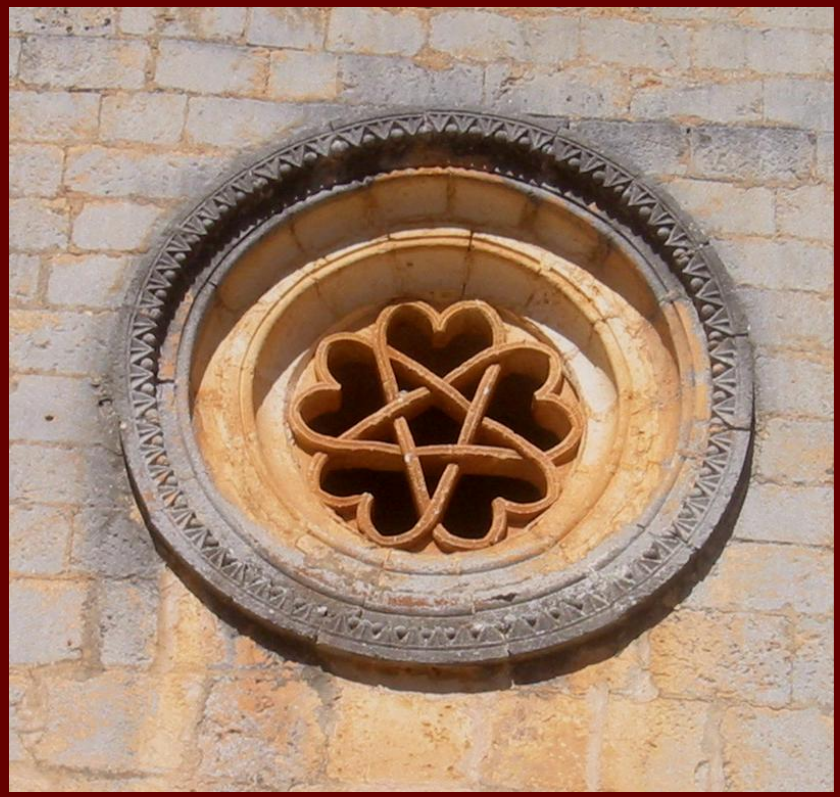
Símbolo de los pitagóricos. Símbolo de la salud y la vida.

Para los judíos representa los "cinco libros Mosaicos".

Iglesia de S. Bartolomé-Cañón del Río Lobos (S. XIII)

Pentalfa o Pentagrama

Los rosetones mandálicos de San Bartolomé están formados por diez corazones (5 pequeños y 5 largos) entrelazados, que rodean y crean la pentalfa y el pentágono. Esta enigmática celosía calada es, según algunos autores, de tracería musulmana.



Pentalfa o Pentagrama

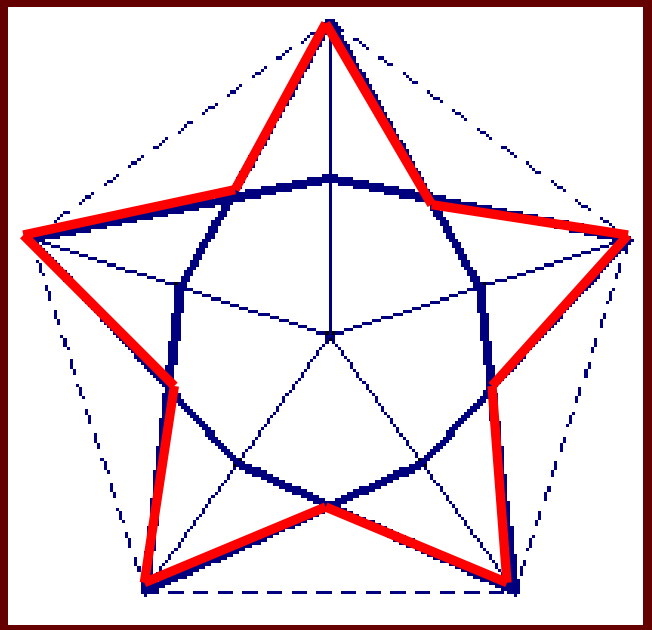
Iglesia de S. Juan
AYLLÓN (Segovia)

Iglesia de S. Francisco
OPORTO

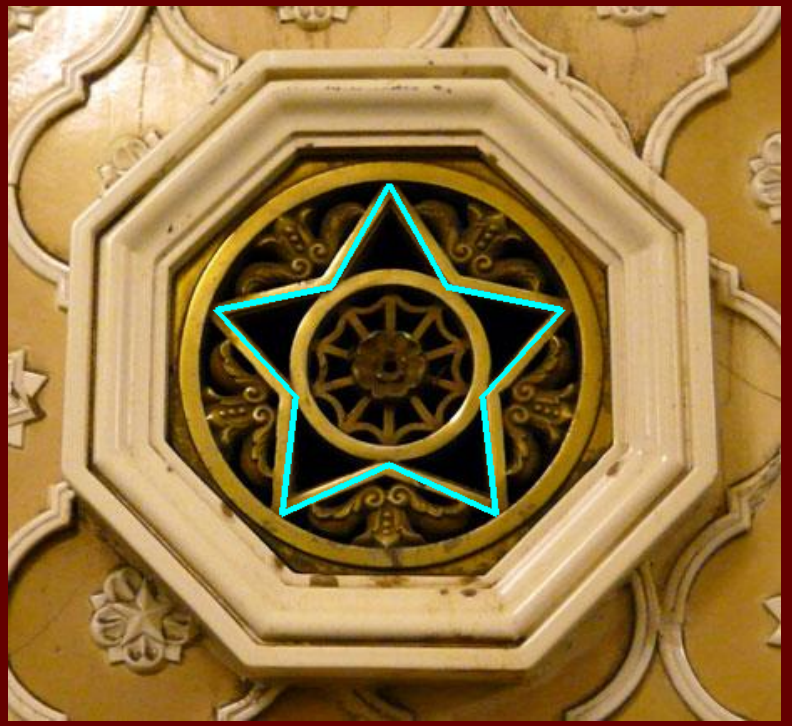
Estrella de cinco puntas (OTRA)

La variedad de pentagrama de la figura fue encontrada en la parte inferior de las actas de una logia de 1860, tal vez de esta forma deriva la Estrella Roja de los Soviets.

Se traza a partir de un pentágono regular, uniendo el punto medio de cada uno de sus radios con los dos vértices adyacentes.
En la parte central de la construcción aparecen cinco cuadriláteros que forman un decágono equilátero pero no regular.



Estrella de cinco puntas (OTRA)



Hexagrama

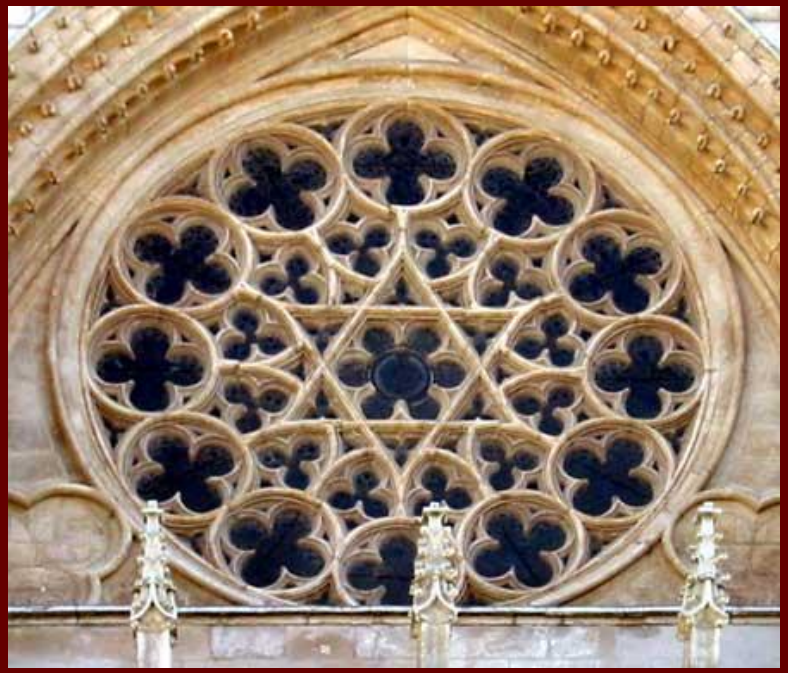
Esta figura conocida también como “estrella de David” o “sello de Salomón”, además de símbolo hebreo, es utilizada, como elemento decorativo, por otras culturas y religiones.

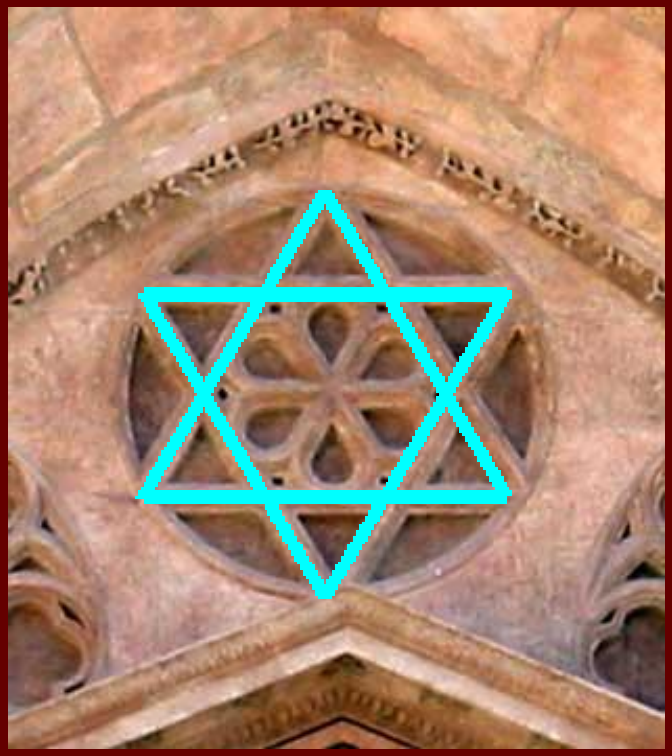
Claustro de la Catedral
ÉVORA

Hexagrama

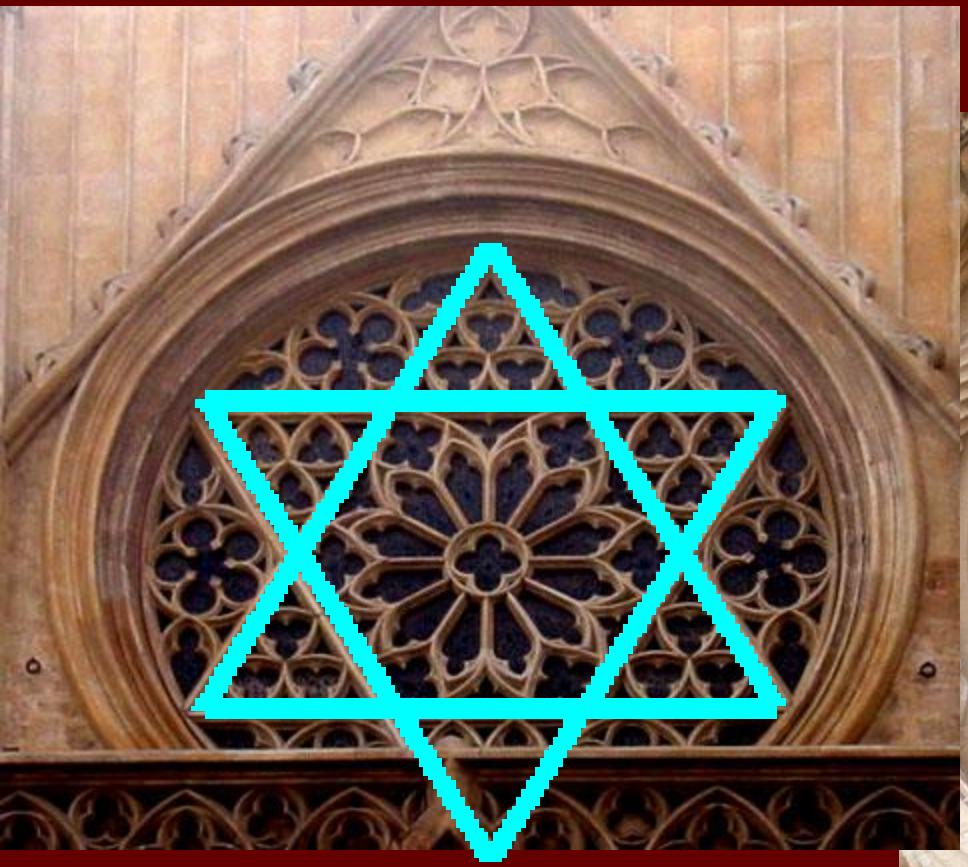
HEXAGRAMAS EN LOS ROSETONES DE LA

CATEDRAL DE BURGOS





Hexagrama

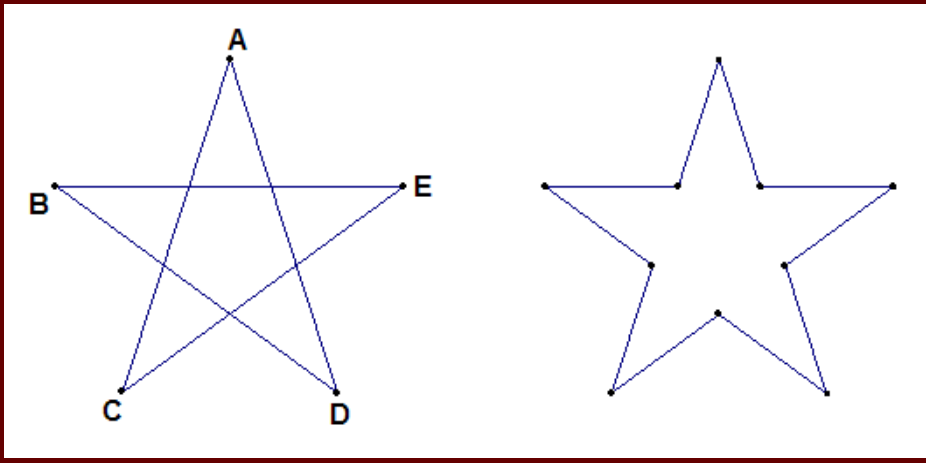


CATEDRAL DE VALENCIA

CATEDRAL DE PALMA DE MALLORCA

INTERPRETACIÓN 2.-

Conectando los 2n segmentos externos de una estrella construida según cualquiera de los procedimientos anteriores, resulta un polígono cóncavo que también se denomina **estrella** y se denota por **|n/q|**, con dos tipos de vértices: punta y mella.



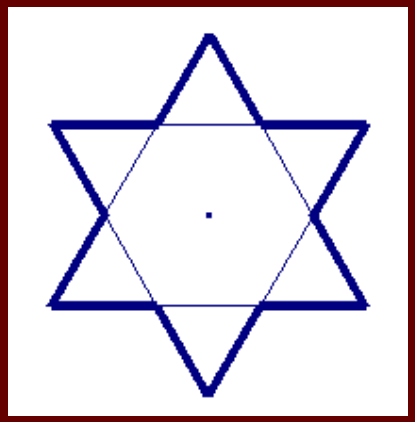
Esta nueva denominación aparece en el segundo libro de la obra "Harmonice Mundi" de Kepler.

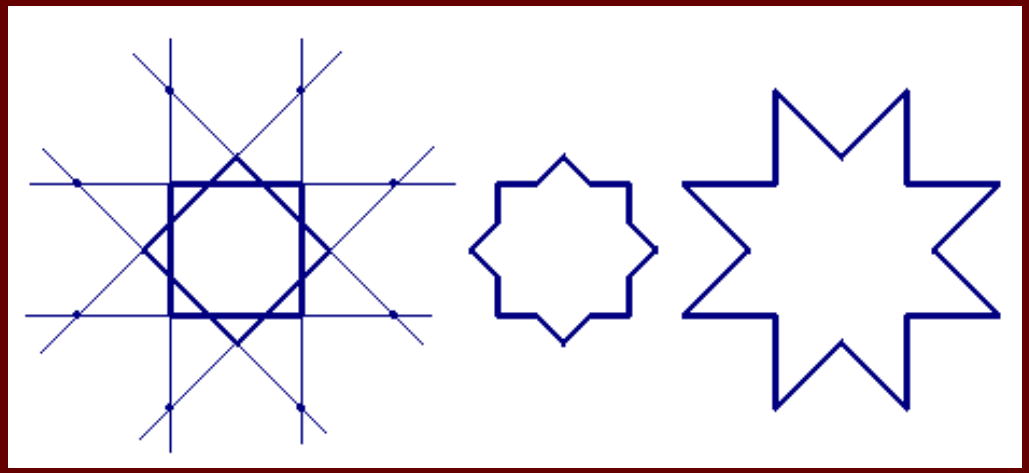
Estrella |5/2| - Fachada **VALLADOLID**

Claustro. Concatedral **SORIA**

INTERPRETACIÓN 2.-

De la estrella 6/2 se obtiene la estrella |6/2| que es un polígono cóncavo de 12 lados.





Mosaico romano – Palacio de Lebrija
SEVILLA

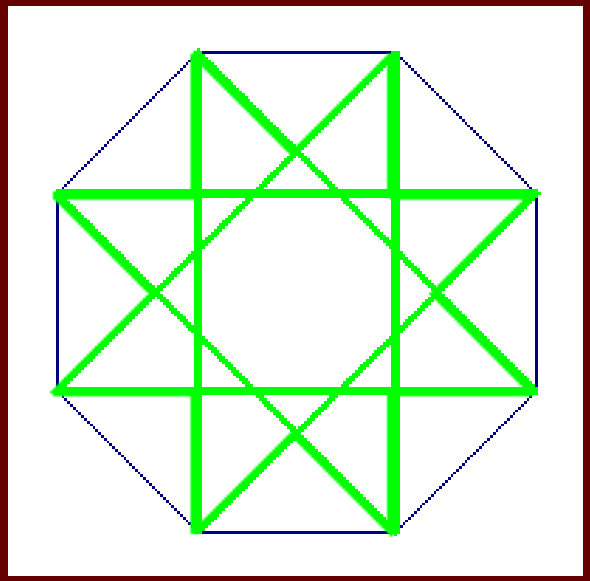
Sinagoga de BUDAPEST

INTERPRETACIÓN 2.-

ERMITAGE – **SAN PETESBURGO**

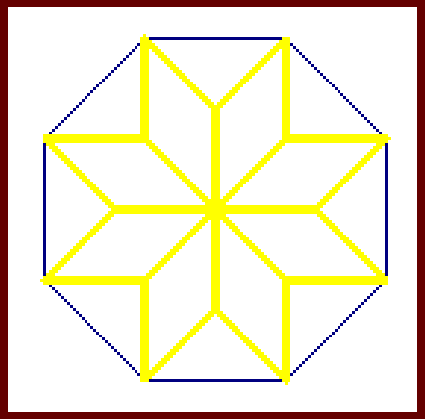
INTERPRETACIÓN 2.-

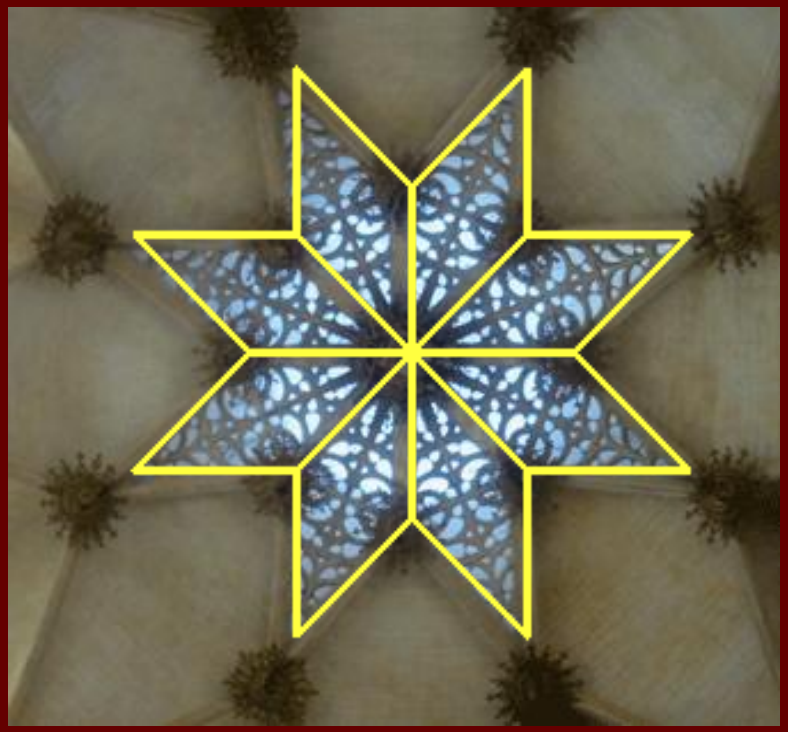
A partir del polígono estrellado 8/3 se obtiene el polígono cóncavo |8/3| que tiene dieciséis lados.



Pavimento – Capilla de la Consolación (CATEDRAL DE Burgos)

Formas estrelladas en la Catedral de Burgos

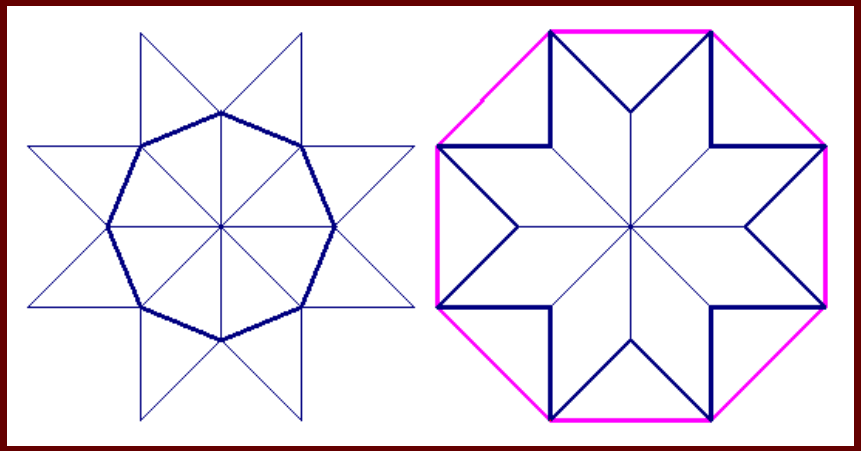


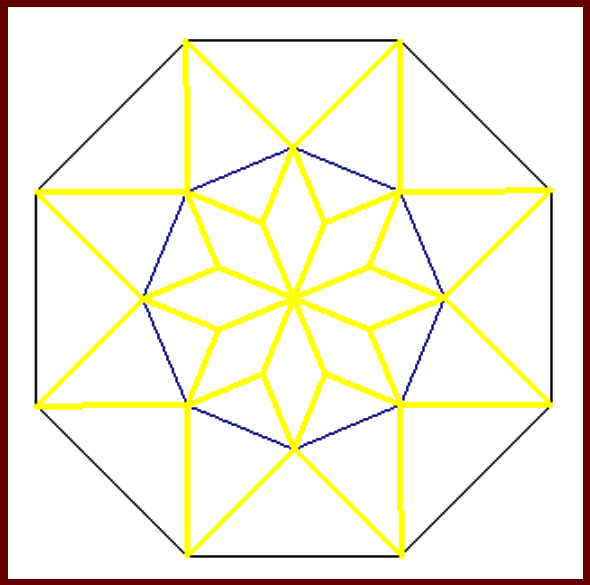


Capilla de la Consolación

Catedral de BURGOS

Formas estrelladas en la Catedral de Burgos

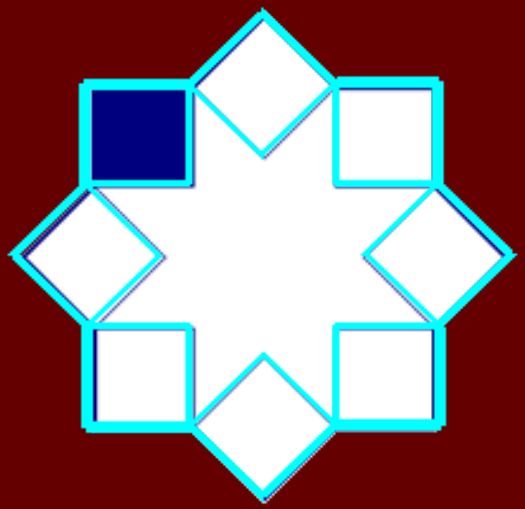




Cimborrio

Catedral de BURGOS

Estrellas **|8/2|** y **|8/3|** en la Abadía de **WESTMISTER**



Detalle del abovedado de la Capilla de Enrique VIII

Estrellas **|n/q|** con PAPEL