Problemas de la 11ª semana

2º ESO

1º-) Cuál de los números es mayor 4^{3000} o 3^{4000}

Solución: $4^{3000}=\left(4^3\right)^{1000}=64^{1000} \rightarrow 3^{4000}=\left(3^4\right)^{1000}=81^{1000} \rightarrow es\ mayor\ 3^{4000}$

2º-) Calcular la longitud de un arco de 48º en un círculo de diámetro 4π .

Solución:

$diámetro=4\pi \rightarrow radio=2\pi$

$$\left.\begin{cases} 2\cdot\pi\cdot 2\pi \xrightarrow{corresponde} 360^{o} \\ x \xrightarrow{corresponde} 48^{o}\end{cases}\right\} \rightarrow x=\frac{4\pi^2\cdot 48}{360}=\frac{8\pi^2}{15}$$

3º-) ¿Cuántos capicúas existen de 4 cifras en los que las dos cifras extremas suman lo mismo que las 2 centrales?

Solución:

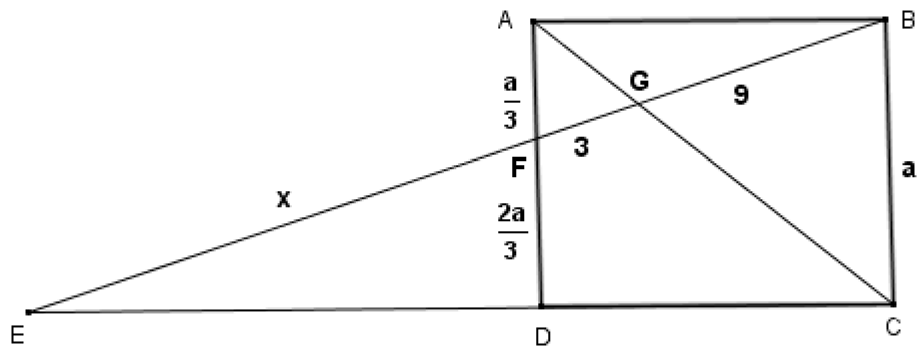
$Capicúas\ de\ cuatro\ cifras \rightarrow abba$

$2a=2b \rightarrow a=b \rightarrow luego\ hay\ 9 \rightarrow 1111 \rightarrow 2222 \rightarrow 3333 \rightarrow ....9999$

4º ESO

1º-) Sea un cuadrado ABCD. Una recta dibujada por B corta a la prolongación del lado CD en E, al lado AD en F y a la diagonal AC en G. Si BG = 9 y GF = 3, calcular EF.

Solución:



Los triángulos AFG y GBC son semejantes, luego si $\frac{FG}{GB}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3} \rightarrow \frac{AF}{BC}=\frac{1}{3}$

Los triángulos EBC y EFD son semejantes, luego $\frac{a}{\frac{2a}{3}}=\frac{12+x}{x} \rightarrow x=\frac{2(12+x)}{3} \rightarrow x=24$

2º-) Calcular x en la expresión: $21^{5n-3}\cdot 14^{n+4}=6^{n-2}\cdot 49^{3n+1}\cdot 9^{2n+1}\cdot x$

Solución:

$$3^{5n-3}\cdot 7^{5n-3}\cdot 2^{n+4}\cdot 7^{n+4}=2^{n-2}\cdot 3^{n-2}\cdot 7^{6n+2}\cdot 3^{4n+2}\cdot x$$

$$x=\frac{3^{5n-3}\cdot 2^{n+4}\cdot 7^{6n+1}}{3^{5n}\cdot 2^{n-2}\cdot 7^{6n+2}}=3^{-3}\cdot 2^{6}\cdot 7^{-1}=\frac{2^{6}}{3^{3}\cdot 7}=\frac{64}{189}$$

3º-) Calcular la cifra de las unidades del número $2^{47}\cdot 3^{85}$

Solución:

$2^{47}\rightarrow$ *desarrollamos las potencias* de 2 *y ponemos la última cifra*

$2,4,8,6,2,4,8,6,2,4,.........\rightarrow$ *se repiten de* 4 *en* 4 $\rightarrow$ *al dividir* $47:4$ *da* 11 *de cociente y* 3 *de resto*

luego 2^{47} *acaba en* 8

$3^{85}\rightarrow$ *desarrollamos las potencias* de 3 *y ponemos la última cifra*

$3,9,7,1,3,9,7,1,3,9,............\rightarrow$ *se repiten de* 4 *en* 4 $\rightarrow$ *al dividir* $85:4$ *da* 21 *de cociente y* 1 *de resto*

luego 3^{85} *acaba en* 3

$\rightarrow 3\cdot 8=24\rightarrow$ luego la cifra de las unidades de $2^{47}\cdot 3^{85}$ *es* 4

Bachillerato

1º-) Calcula $\displaystyle\sum_{n=1}^{72} sen^{2}\frac{n\pi}{36}$

Solución:

Teniendo presente la relación $sen^{2}x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos 2x}{2}$

$$\sum_{n=1}^{72} sen^{2}\frac{n\pi}{36}=\sum_{n=1}^{72}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos\frac{n\pi}{18}}{2}\right)=\sum_{n=1}^{72}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 10n}{2}\right)=$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 10+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 20+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 30+...........+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 720=$$

$$36-\frac{1}{2}\left(\cos 10+\cos 20+\cos 30+.......................\cos 720\right)=$$

$$36-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(\underbrace{\cos 10+\cos 20+\cos 30+....................\cos 360}_{=0}\right)=36$$

2º-) Si $40^a = 2$ y $40^b = 4$, calcula $10^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} a\log_2 40 = \log_2 2 \rightarrow a(\log_2 5 + \log_2 8) = 1 \rightarrow a = \dfrac{1}{\log_2 5 + 3} \\ b\log_2 40 = \log_2 4 \rightarrow b(\log_2 5 + \log_2 8) = 2 \rightarrow b = \dfrac{2}{\log_2 5 + 3} \end{array}\right\}$$

$$\frac{1-a-b}{1-b} = 1 - \frac{a}{1-b} = 1 - \frac{\dfrac{1}{\log_2 5 + 3}}{1 - \dfrac{2}{\log_2 5 + 3}} = 1 - \frac{1}{1+\log_2 5} = \frac{\log_2 5}{1+\log_2 5}$$

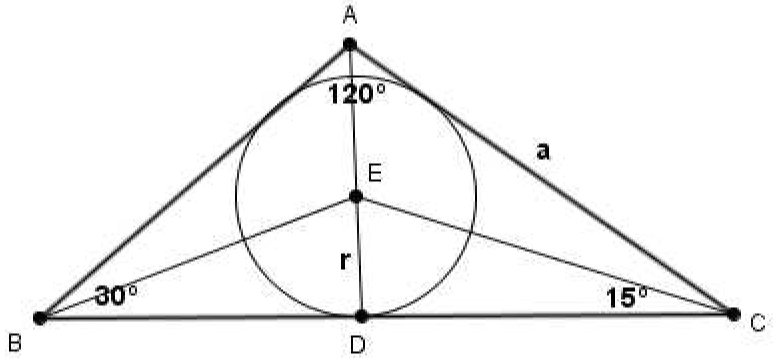
$$10^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}} = 10^{\frac{\log_2 5}{2(1+\log_2 5)}} = X$$

$$\frac{\log_2 5}{2(1+\log_2 5)} \cdot \log_2 10 = \log_2 x \rightarrow \frac{\log_2 5(\log_2 5 + 1)}{2(1+\log_2 5)} = \log_2 x \rightarrow \log_2 5 = 2\log_2 x$$

$$\log_2 5 = \log_2 x^2 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \sqrt{5}$$

3º-) En un triángulo isósceles ABC, AB = AC = a y el ángulo A = 120º. Calcular el radio del círculo inscrito.

Solución:



$$DC = AC \cdot \cos 30º \rightarrow DC = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 15º = \frac{r}{DC} \rightarrow r = a\frac{\sqrt{3}}{2}\tan 15º$$

$$\tan 15º = \tan(45º – 30º) = \frac{\tan 45º - \tan 30º}{1 + \tan 45º \cdot \tan 30º} = \frac{1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = racionalizando = 2 - \sqrt{3}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}$$