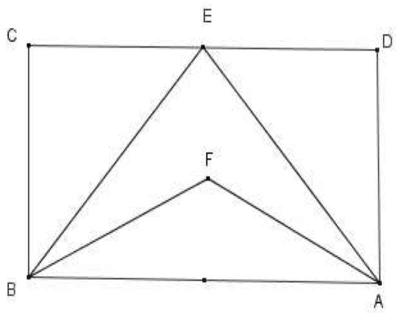
Problemas de la 30ª semana

2º ESO

1º) En la figura; el ángulo. Se dibuja un punto F dentro del triángulo BEA de forma que BF y AF son las bisectrices de los ángulos $E\hat{B}A \ \ y \ \ E\hat{A}B$. Hallar el ángulo $B\hat{F}A$.

Solución:



ángulo CEB = ángulo ABE; por alternos e internos $\Rightarrow$ $F\hat{B}A = \frac{1}{2} A\hat{B}E$.

ángulo DEA = ángulo BAE por alternos e internos $\Rightarrow$ $B\hat{A}F = \frac{1}{2} B\hat{A}E$

ángulo BFA = 180º - (FBA + FAB) =

180 – ($\frac{1}{2}$ ABE + $\frac{1}{2}$ BAE) = 180º – 40º = 140º

2º-) De las 2,30 horas a las 2,50 horas, ¿cuántos grados ha girado la manecilla de las horas de un reloj?

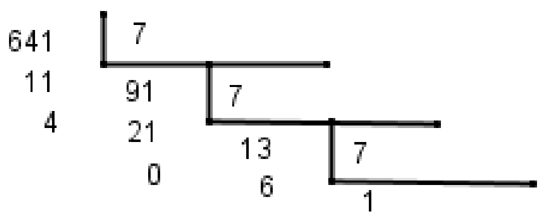
Solución:

360º : 12 = 30º $\Rightarrow$ cada hora la manecilla de las horas gira 30º

$$\left.\begin{array}{l} 60 \min utos \xrightarrow{corresponden} 30^{o} \\ 20 \min utos \xrightarrow{corresponden} x^{o} \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{20 \cdot 30}{60} = \frac{600}{60} = 10^{o}$$

3º-) Expresa el número 641 en base 7.

Solución:



$641 = 1604_7$

4º ESO

1º-) Calcular el resto al dividir $x^{27}+x^9+x^6+x^3$ entre x^2-1.

Solución:

Al dividir $(x^{27}+x^9+x^6+x^3)$ *entre* (x^2-1) el resto será un polinomio de primer grado: R = ax + b; luego se verifica:

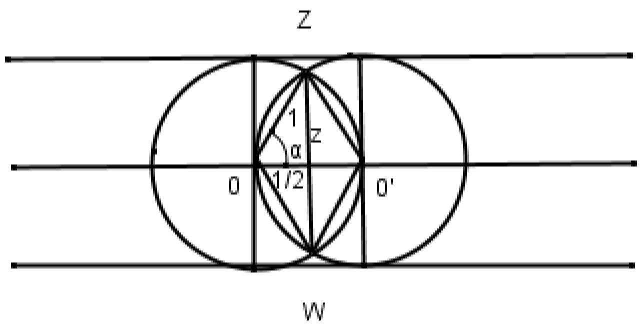
$$(x^{27}+x^9+x^6+x^3)=(x^2-1)\cdot Q(x)+(ax+b)\rightarrow Q(x) es\ \ el\ \ cociente$$

$$\left\{\begin{matrix} si\ \ x=1\Rightarrow 1^{27}+1^9+1^6+1^3=0\cdot Q(x)+a+b\Rightarrow 4=a+b \\ si\ \ x=-1\Rightarrow(-1)^{27}+(-1)^9+(-1)^6+(-1)^3=0\cdot Q(x)-a+b\Rightarrow -2=-a+b \end{matrix}\right\}$$

Resolviendo lo anterior $\Rightarrow$ a = 3; b = 1 $\Rightarrow$ Resto = 3x + 1

2º-) Dos círculos de radios 1 cm. están superpuestos de forma que el centro de cada uno está en la circunferencia del otro. Calcular el área de la región superpuesta.

Solución:



$$z=\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Área triángulo OZW =

$$\frac{2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

El triángulo ZOO' es equilátero, luego $\alpha = 60º$ y por tanto el ángulo del sector circular es 120º.

Área sector circular: $\frac{\Pi\cdot 1^2\cdot 120}{360}=\frac{\Pi}{3}$

Área región superpuesta = $2\,(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{6}$

3º-) Si $f\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)=5x$, calcular $f(2)$

Solución:

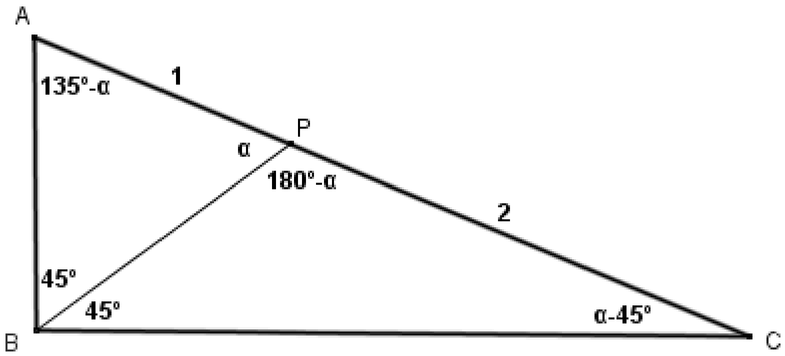
$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=2\Rightarrow\frac{1+x}{1-x}=4\Rightarrow 1+x=4-4x\Rightarrow 5x=3\Rightarrow x=\frac{3}{5}$$

$$f(2)=5\cdot\frac{3}{5}\Rightarrow f(2)=3$$

Bachillerato

1º-) Sea ABC un triángulo rectángulo y P un punto en la hipotenusa AC tal que el ángulo $A\hat{B}P = 45º$. Si AP = 1 y CP = 2, hallar el área de ABC.

Solución:



Por el teorema de los senos:

$$\frac{1}{sen45^o} = \frac{AB}{sen\alpha} = \frac{BP}{sen(135º - \alpha)} \rightarrow \text{en el triángulo ABP}$$

$$\frac{2}{sen45^o} = \frac{BC}{sen(180º - \alpha)} = \frac{BP}{sen(\alpha - 45^o)} \rightarrow \text{ en el triángulo BPC}$$

$$AB = \frac{sen\alpha}{sen45^o} = \frac{sen\alpha}{\sqrt{2}/2}$$

$$BC = \frac{2sen(180 - \alpha)}{sen45} = \frac{2sen\alpha}{\sqrt{2}/2} = 2\ AB \Rightarrow BC = 2 \cdot AB$$

Si AB = x $\Rightarrow$ BC = 2x

En el triángulo ABC $\Rightarrow x^2 + (2x)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 = 9/5$

$$\text{Área} = \frac{BC \cdot AB}{2} = \frac{2x \cdot x}{2} = x^2 = 9/5$$

2º-) Expresar la siguiente suma como cociente de dos enteros.

$$\frac{4}{1989 \cdot 1993} + \frac{4}{1993 \cdot 1997} + \frac{4}{1997 \cdot 2001} + \frac{4}{2001 \cdot 2005}$$

Solución:

$$1989 \cdot 1993 = (1993 - 4) \cdot 1993 = 1993^2 - 4 \cdot 1993 = (1993 - 2)^2 - 4 = 1991^2 - 4$$

$$1993 \cdot 1997 = (1997 - 4) \cdot 1997 = 1997^2 - 4 \cdot 1997 = (1997 - 2)^2 - 4 = 1995^2 - 4$$

$$1997 \cdot 2001 = (2001 - 4) \cdot 2001 = 2001^2 - 4 \cdot 2001 = (2001 - 2)^2 - 4 = 1999^2 - 4$$

$$2001 \cdot 2005 = (2005 - 4) \cdot 2005 = 2005^2 - 4 \cdot 2005 = (2005 - 2)^2 - 4 = 2003^2 - 4$$

$$\frac{4}{1991^2-4}+\frac{4}{1995^2-4}+\frac{4}{1999^2-4}+\frac{4}{2003^2-4}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a+2}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{a+2-a+2}{a^2-4}\right]=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{a^2-4}=\frac{1}{a^2-4}$$

Aplicando esta descomposición al término de la misma:

$$\frac{4}{1991^2-4}=4\cdot\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1991-2}-\frac{1}{1991+2}\right]=\frac{1}{1989}-\frac{1}{1993}$$

$$\frac{4}{1995^2-4}=4\cdot\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1995-2}-\frac{1}{1995+2}\right]=\frac{1}{1993}-\frac{1}{1997}$$

$$\frac{4}{1999^2-4}=4\cdot\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1999-2}-\frac{1}{1999+2}\right]=\frac{1}{1997}-\frac{1}{2001}$$

$$\frac{4}{2003^2-4}=4\cdot\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2003-2}-\frac{1}{2003+2}\right]=\frac{1}{2001}-\frac{1}{2005}$$

$$\frac{1}{1989}-\frac{1}{1993}+\frac{1}{1993}-\frac{1}{1997}+\frac{1}{1997}-\frac{1}{2001}+\frac{1}{2001}-\frac{1}{2005}=$$

$$\frac{1}{1989}-\frac{1}{2005}=\frac{2005-1989}{1989\cdot 2005}=\frac{16}{1989\cdot 2005}$$

3º-) Calcular la suma: $S=1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+.....100\cdot 3^{100}$

<u>Solución:</u>

$$S=1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+.............100\cdot 3^{100}$$

$$3S=1\cdot 3^2+2\cdot 3^3+3\cdot 3^4+.............99\cdot 3^{100}+100\cdot 3^{101}$$

Restando:

$$S-3S=1\cdot 3+3^2+3^3+3^4+\cdots\cdots 3^{100}-100\cdot 3^{101}$$

$$-2S=\frac{3(3^{100}-1)}{3-1}-100\cdot 3^{101}$$

$$-4S=3^{101}-3-200\cdot 3^{101}$$

$$-4S=3^{101}(1-200)-3$$

$$-4S=-199\cdot 3^{101}-3$$

$$S=\frac{199\cdot 3^{101}+3}{4}=\frac{3\cdot(199\cdot 3^{100}+1)}{4}$$