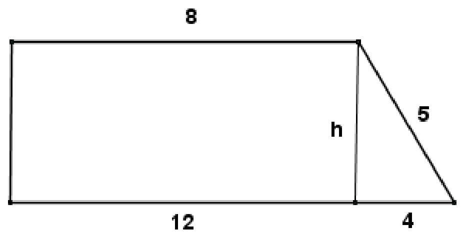
Problemas de la 19ª semana

2º ESO

1º-) En un trapecio rectángulo las bases miden 8cm y 12cm y el lado oblicuo 5cm. Hallar su área.

Solución:



$$h = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$$A = \frac{(12+8)3}{2} = 30$$

2º-) ¿Cuál es el dígito de las unidades del número 2^{2001}?

Solución:

$2 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^4 = 16$; $2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $2^7 = 128$; $2^8 = 256$;
Se repiten de 4 en 4.
$2001 \div 4$ → el resto es 1. Luego 2^{2001} = $2^1 = 2$

3º-) Si los ángulos exteriores x, y, z de un triángulo están en la relación 4: 5: 6, ¿en qué relación estarán los ángulos interiores a, b, y c?

Solución:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} = \frac{x+y+z}{15} = \frac{360^o}{15} = 24^0 \to x = 96^0 \to y = 120^0 \to z = 144^0 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 180^o - 96^0 = 84^o \\ b = 180^o - 120^o = 60^o \\ c = 180^o - 144^o = 36^o \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a}{b} = \dfrac{84}{60} = \dfrac{7}{5} \\ \dfrac{b}{c} = \dfrac{60}{36} = \dfrac{5}{3} \end{array} \right\} \to \frac{a}{7} = \frac{b}{5} = \frac{c}{3}$$

4º ESO

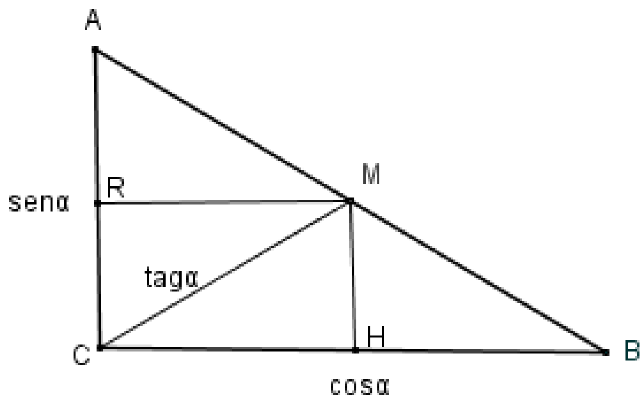
1º-) El número 190, escrito en el sistema decimal, está representado por 276 en un sistema de base desconocida. Hallar esa base.

Solución:

$190 = 276_{(u} \rightarrow 190 = 6 + 7u + 2u^2 \rightarrow 2u^2 + 7u - 184 = 0 \rightarrow$
Resolviendo u = 8

2º-) Sea ABC un triángulo rectángulo en C. AC = $sen\alpha$ y BC = $\cos\alpha$. Calcular la longitud del cateto mayor si la longitud de la mediana a la hipotenusa AB es $tag\alpha$. ($tag\alpha$ es la tangente de α).

Solución:



Calculamos la hipotenusa AB

$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = AB^2 \rightarrow AB^2 = 1 \rightarrow AB = 1$

Como M es el punto medio de AB, MR y MH son las paralelas medias, luego

MR = $\dfrac{\cos\alpha}{2}$ y MH = $\dfrac{sen\alpha}{2}$

Aplicando Pitágoras al triángulo CMH $\Rightarrow \left(\dfrac{\cos\alpha}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{sen\alpha}{2}\right)^2 = tag^2\alpha$

$\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 4tag^2\alpha \quad \Rightarrow \quad 1 = 4tag^2\alpha \rightarrow tag^2\alpha = \dfrac{1}{4}. \rightarrow tag\alpha = \dfrac{1}{2}$

$1 + tag^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{\cos^2} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$$1+\cot ag^2\alpha=\frac{1}{sen^2\alpha}\Rightarrow 1+4=\frac{1}{sen^2\alpha}\Rightarrow sen\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

El cateto mayor es CB = $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

3º-) Ordena de menor a mayor los siguientes números: $1^{48},\ 2^{42},\ 3^{36},\ 4^{30},\ 5^{24},\ 6^{18},\ 7^{12},\ 8^6,\ 9^0$.

Solución:

$$1^{48},\ 9^0,\ (2^7)^6,\ (3^6)^6,\ (4^5)^6,\ (5^4)^6,\ (6^3)^6,\ (7^2)^6,\ 8^6\rightarrow$$
$$1,\ 1,\ 128^6,\ 729^6,\ 1024^6,\ 625^6,\ 216^6,\ 49^6,\ 8^6\rightarrow$$
$$1\leq 1<8^6<49^6<128^6<216^6<625^6<729^6<1024^6$$

Bachillerato

1º-) El m.c.d. de dos números es 3. ¿Cuáles son esos números, sabiendo que la serie de cocientes que se obtienen al hallar su m.c.d. es 5, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2?

Solución:

	5	1	2	1	2	3	1	2
2286	399	291	108	75	33	9	6	3
291	108	75	33	9	6	3	0	

Los números son : 2286 y 399

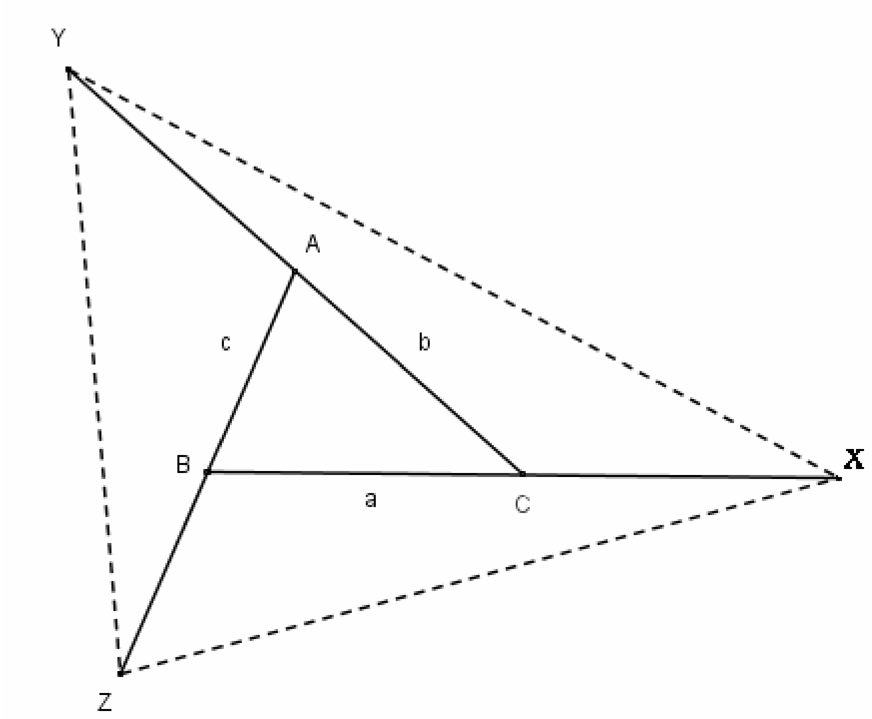
2º-) Sea x un número real tal que $x^3+4x=8$. Calcular el valor de x^7+64x^2.

Solución:

$$x^3+4x=8\Rightarrow (x^3+4x)^2=8^2\Rightarrow x^6+8x^4+16x^2=64$$
$$x^7+64x^2=x(x^6+64x)=x(64-16x^2-8x^4+64x)=$$
$$=x\left[16(4-x^2)+8x(8-x^3)\right]=$$
$$=x\left[16(4-x^2)+8x\cdot(4x)\right]=$$
$$=x\left[64-16x^2+32x^2\right]=x\left[16x^2+64\right]=$$
$$=16x\left[x^2+4\right]=16\left[x^3+4x\right]=16\cdot 8=128$$

3º-) El lado BC de un triangulo ABC se prolonga por C hasta X de tal forma que BC = CX. El lado CA se prolonga por A hasta Y de forma que CA = AY, y el lado AB se prolonga por B hasta Z de forma que AB = BZ. Calcular el cociente entre el área del triángulo XYZ y el área del triángulo ABC.

Solución:



Área triángulo ZBX = $\frac{c \cdot 2a \cdot senB}{2}$

Triángulo CXY = $\frac{a \cdot 2b \cdot senC}{2}$

Triángulo ZAY= $\frac{b \cdot 2c \cdot senA}{2}$

Triángulo ABC = $\frac{a \cdot b \cdot senC}{2}$

$$\frac{triánguloXYZ}{triánguloABC} = \frac{c \cdot a \cdot senB + a \cdot b \cdot senC + b \cdot c \cdot senA + \frac{a \cdot b \cdot senC}{2}}{\frac{a \cdot b \cdot senC}{2}} =$$

$$\frac{2ABC + 2ABC + 2ABC + ABC}{ABC} = \frac{7ABC}{ABC} = 7$$