

PROGRESIONES ARITMETICAS

DEF 1 . Se dice que una serie de números están en *progresión aritmética* cuando cada uno de ellos (excepto el primero) es igual al anterior más una cantidad constante llamada *diferencia* de la progresión.

EJEMPLO 1.- 1, 4, 7, 10 Es una progresión cuya diferencia es 3.

30, 25, 20, 15... Es una progresión cuya diferencia es -5

RESULTADO 1.- Término n-ésimo de una progresion aritmetica

Si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ son los sucesivos términos de una progresión aritmética cuya diferencia es "d", se pueden escribir las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d \\ a_5 &= a_4 + d = a_1 + 4d \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ a_n &= a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

Es decir:

El término n-ésimo, también llamado TÉRMINO GENERAL, de una progresión aritmética se obtiene sumando al primer término la diferencia multiplicada por (n -1):

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

RESULTADO 2.- Suma de términos equidistantes de los extremos

Dos términos a_p y a_q de una progresión aritmética son equidistantes de los extremos cuando el número de términos que preceden a a_p es igual al número de términos que siguen a a_q .

En las progresiones aritméticas los términos equidistantes de los extremos verifican la siguiente propiedad:

La suma de dos términos de una progresión aritmética, equidistantes de los términos extremos, es igual a la suma de dichos extremos.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \dots = 2a_1 + (n-1) \cdot d$$

RESULTADO 3.- Suma de "n" términos de una progresión aritmética

La suma de los términos de una progresión aritmética es igual a la semisuma de los términos extremos multiplicada por el número de términos que se suman.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Siendo a_1 = Primer sumando; a_n = Último Sumando; $n = n^\circ$ de Sumandos

De otra forma:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$$

a_1 = Primer sumando; d = Diferencia

EJERCICIOS RSUELTOS:

P1.- Halla el término cuadragésimo octavo de la progresión aritmética de diferencia 3 y primer término 11.

$$\text{SOL: } a_{48} = a_1 + (48-1) \cdot d = 11 + 47 \cdot 3 = 152$$

P2.- Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética, hálalos si el mayor vale 100° .

SOL: Sean a , $a+d$ y $a+2d$ los tres ángulos. La suma de los tres es:

$$a + (a+d) + (a+2d) = 3a+3d = 180 \Rightarrow (a+d) = 60 ;$$

Como el mayor es 100, $100 = a+2d \Rightarrow d = 40$ y los ángulos son : 100° , 60° y 20° .

P3.- Suma $200 + 201 + 202 + \dots + 299$

SOL: Es la suma de 100 términos de una progresión aritmética de diferencia 1

Luego

$$S = 200 + 201 + 202 + \dots + 299 = \frac{200 + 299}{2} \cdot 100 = 24950$$

PRACTICA:

P4.- Una progresión aritmética de 50 términos empieza por 9 y termina por 200. Calcular su diferencia y la suma de sus términos.

P5.- Calcula la suma de los mil primeros números pares y de los mil primeros números impares. ¿Cuál es mayor?.

P6.- Calcula el valor de $1+2+3+4+ \dots + n$

P7.- Calcula el valor de la suma de los n primeros números Pares. Idem para los n primeros números Impares

P8.- En una progresión aritmética, la suma de los 100 primeros términos es 100 y la suma de los 100 siguientes, desde a_{101} hasta a_{200} , es 200. ¿Cuál es la diferencia de la progresión?

P9.- La suma de 18 enteros positivos consecutivos es un cuadrado perfecto. ¿Cuál es el menor valor posible de la suma de ellos

P10.- En una progresion aritmetica $a_3 \cdot a_7 = -12$ y $a_4 + a_6 = -4$. Hallar el termino general y la suma de los 20 primeros terminos.

P11.- Los tres primeros términos de una progresion aritmetica son $a, 4, 3a$. Hallar el termino general y la suma de los 30 primeros términos. Si la suma de los n primeros términos es 2550, halla n .

P12.- En una progresion aritmetica la suma de los 10 primeros terminos es 140 y la suma de los diez primeros terminos impares es 125. Cuanto vale a_6 ?

P13.- a_n es una progresion aritmetica y $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{a_n}$. Si $b_1 + b_2 + b_3 = 21/8$ y $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = 1/8$, calcula a_8

P14.- Los 4 primeros terminos de una progresion aritmetica son $a, x, b, 2x$. Calcula el valor de a/b

P15.- Los 4 primeros terminos de una progresion aritmetica son $x+y, x-y, x \cdot y$ y x/y en ese orden. ¿Cuál es el 5º termino?

P16.- Se llenan los cuadrados vacios de la tabla de la figura de manera que los números de cada fila, de cada columna y de las dos diagonales forman progresiones aritméticas. ¿Cuál debe ser el número x ?

				21
	16			
		27		
				x

PROGRESIONES GEOMETRICAS

DEF2 . Se dice que una serie de números están en *progresión geométrica* cuando cada uno de ellos (excepto el primero) es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante llamada **razón** de la progresión.

EJEMPLO 1.- 1, 3, 9, 27, 81..... Es una progresión cuya razón es 3.

8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4,Es una progresión cuya razón 1/2

RESULTADO 4.- Término n-ésimo de una progresion geométrica

Si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ son los sucesivos términos de una progresión geométrica cuya razón es "r", se pueden escribir las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot r \\ a_3 &= a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \\ a_5 &= a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^4 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{(n-1)} \end{aligned}$$

Es decir:

El término n-ésimo, también llamado TERMINO GENERAL, de una progresión geométrica se obtiene multiplicando el primer término por la razón elevada a (n -1)

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$$

RESULTADO 5.- Producto de términos equidistantes de los extremos

El producto de dos términos de una progresión geométrica, equidistantes de los términos extremos, es igual al producto de dichos extremos.

$$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = a_4 \cdot a_{n-3} = \dots$$

RESULTADO 6.- Producto de los terminos de una progresión geometrica

Sea la progresión geométrica de n términos: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$. Si P representa el producto de todos los términos, se tiene:

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_n^n}$$

El producto de los términos de una progresión geométrica limitada es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos elevado a un exponente igual al número de términos que se multiplican.

RESULTADO 7.- Suma de "n" términos de una progresión geométrica

Sea la progresión geométrica de n términos: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$. Si S_n representa la suma de los n términos, se tiene:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1}$$

Fórmula que permite hallar la suma de los términos de una progresión geométrica limitada, conociendo el primer término, el último y la razón.

RESULTADO 8.- Suma de infinitos términos de una progresión geométrica de razón r (siendo r un número tal que $-1 < r < 1$)

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{a_1}{1 - r}$$

La suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada decreciente es igual al primer término dividido por $(1 - r)$.

EJERCICIOS RSUELTOS:

P1.- La razón r de una progresión geométrica es 3 y el tercer término vale 45. Halla la suma de los 8 primeros términos.

SOL:

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 \rightarrow 45 = a_1 \cdot 9 \rightarrow a_1 = 5$$

$$a_8 = a_1 \cdot r^7 = 5 \cdot 3^7 = 5 \cdot 2187 = 10935$$

$$S_8 = \frac{a_8 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{10935 \cdot 3 - 5}{3 - 1} = \frac{32800}{2} = 16400$$

P2.- En una progresión geométrica de razón $r = 3$, conocemos $S_6 = 1456$. Calcular a_1 y a_4 .

SOL:

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot 3 - a_1}{3 - 1} = \frac{(a_1 \cdot 3^5) \cdot 3 - a_1}{2} = \frac{a_1 \cdot 3^6 - a_1}{2} = 1456 \rightarrow a_1(3^6 - 1) = 2 \cdot 1456$$

$$a_1 = \frac{2912}{(3^6 - 1)} = \frac{2912}{728} = 4 \rightarrow a_4 = a_1 \cdot 3^3 = 4 \cdot 27 = 108$$

P3.- Calcula el valor de $1 + 10 + 100 + 1000 + \dots + \underbrace{1000 \dots 00}_{50 \text{ ceros}}$

SOL:

$$S_{51} = 1 + 10 + 100 + 1000 + \dots + \underbrace{1000 \dots 00}_{50 \text{ ceros}} = 1 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{50} = \frac{10^{50} \cdot 10 - 1}{10 - 1} = \frac{10^{51} - 1}{9}$$

P4.- La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es igual a 4 y $a_2 = 1$. Calcula a_1 y la razón.

SOL:

$$S = \frac{a_1}{1 - r} \rightarrow 4 = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{\left(\frac{a_2}{r}\right)}{1 - r} = \frac{\frac{1}{r}}{1 - r} = \frac{1}{r - r^2} \rightarrow -4r^2 + 4r = 1 \rightarrow 4r^2 - 4r + 1 = 0 \rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{a_2}{r} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

PRACTICA

P17.- Determina el término general de cada una de las siguientes progresiones geométricas:

(a) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

(b) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 3\sqrt{2}, \dots$

(c) $-32, 16, -8, 4, \dots$

P18.- Determina los términos b_1, b_4, b_8 y b_{15} de cada una de las siguientes progresiones geométricas:

(a) $b_1, -8, 16, b_4, \dots$

(b) $b_1, 12, 6, b_4, \dots$

(c) $b_1, 1, \frac{1}{3}, b_4, \dots$

P19- Determina los dos primeros términos de una progresión geométrica que cumple:

(a) $b_8 = 27b_2$ y $b_1 + b_2 + b_3 = 4 + \sqrt{3}$

(b) $b_6 = 4/9$ y $b_7 = -4/27$

(c) $b_{11} = 6144$ y $b_{15} = 32b_{10}$

P20.- Calcula las siguientes sumas:

(a) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{14}}$

(b) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{4^{15}}$

P21.- Si a, b, c, d son números reales positivos tales que a, b, c, d forman una progresión aritmética creciente y a, b, d una progresión geométrica, calcula $\frac{a}{d}$

P22.- Tres números reales forman una progresión aritmética cuyo primer término es 9. Si añadimos 2 al segundo término y 20 al tercero los tres números forman una progresión geométrica. ¿Cuál es el menor valor posible para el tercer término de la progresión geométrica?

P23.- En una progresión geométrica la suma de los primeros dos términos es 7 y la suma de los primeros 6 términos es 91. Cuanto vale la suma de los 4 primeros términos

P24.- 16 equipos juegan en una liga de volleyball. Cada equipo juega una vez contra todos los demás. En cada partido, el ganador consigue un punto y el perdedor 0 puntos; no hay empates. Una vez jugados todos los partidos, los puntos obtenidos por los equipos forman una progresión aritmética. ¿Cuántos puntos tiene el último clasificado?

P25.- En una progresión geométrica a_n $n \geq 1$ se verifica: $a_3 < a_2 < a_4$ Entonces,

- A) $a_3 \cdot a_4 > 0$ B) $a_2 \cdot a_3 < 0$ C) $a_2 \cdot a_4 < 0$ D) $a_2 < 0$ E) $a_2 \cdot a_3 > 0$

P26.- Las longitudes de las aristas de un paralelepípedo rectángulo en centímetros, son números enteros y forman una progresión geométrica de razón $q=2$. ¿Cuál de los siguientes puede ser el volumen del paralelepípedo?

- A) 120 cm^3 B) 188 cm^3 C) 216 cm^3 D) 350 cm^3 E) 500 cm^3