ISOMETRÍAS EN EL PLANO

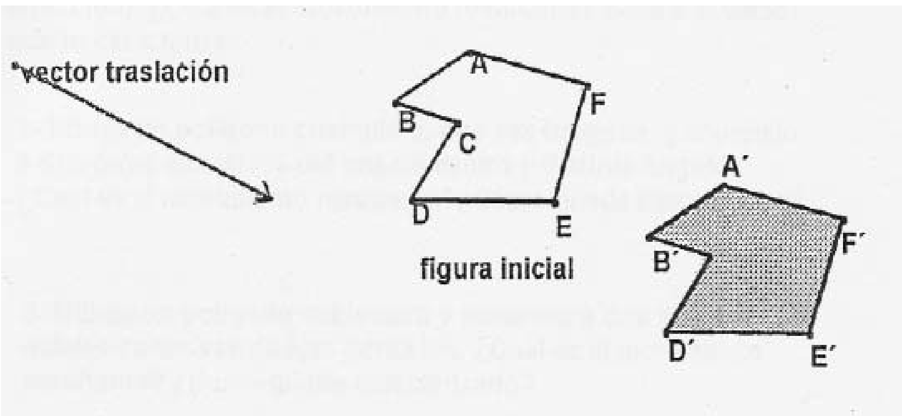
ISOMETRÍA (MOVIMIENTO): transformación que conserva la forma y el tamaño de las figuras.

Hay dos tipos de isometrías:

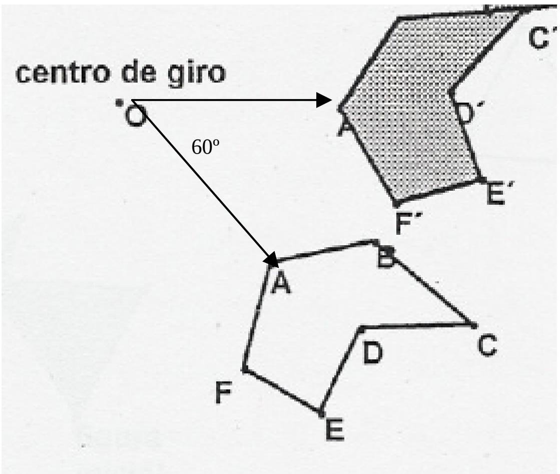
Isometría directa: mantiene el sentido de giro de las agujas del reloj.

Isometría inversa: cambia el sentido de giro de las agujas del reloj.

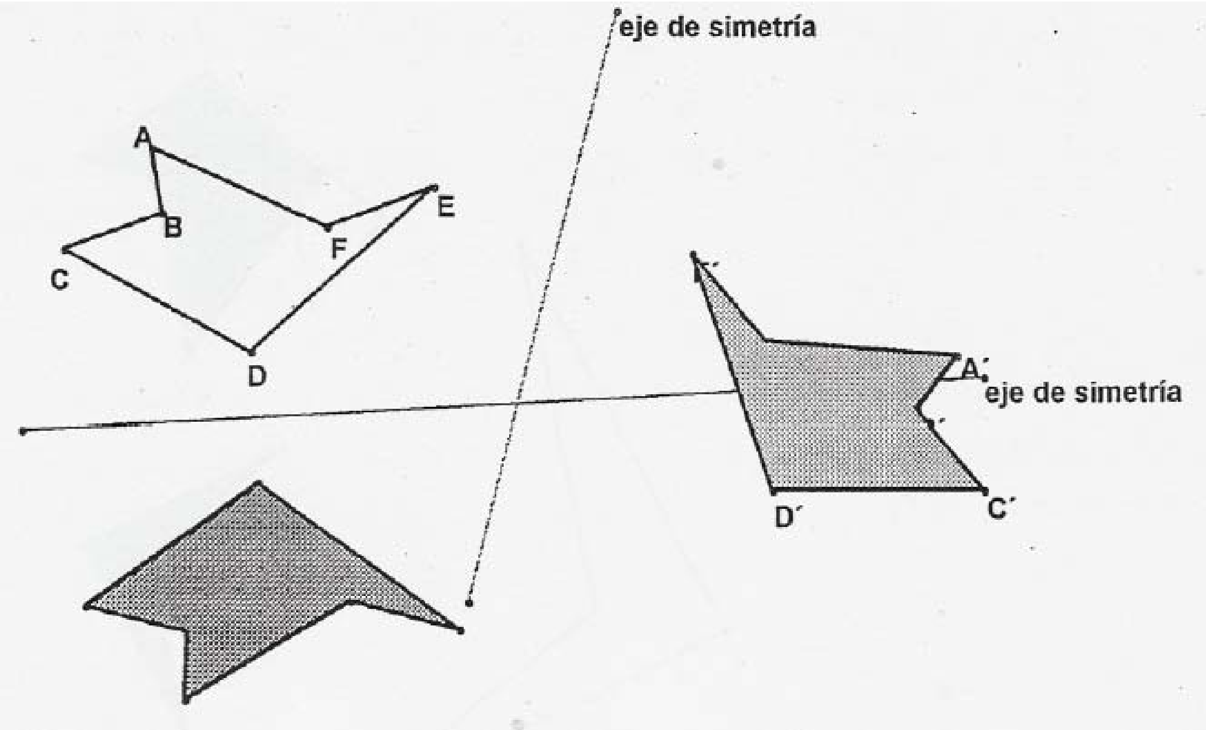
TRASLACIÓN: isometría directa que desplaza las figuras con movimientos rectilíneos, sin deformarlas ni darles la vuelta. Queda caracterizada por el vector traslación.



GIRO: isometría directa que queda caracterizada por un centro, un ángulo y un sentido de giro.



SIMETRÍA AXIAL: isometría inversa que transforma una figura en otra de modo que el eje es la mediatriz de cualquier segmento que una dos puntos homólogos.



1- Dibuja diversos objetos geométricos (punto P, segmento AB, recta r, circunferencia c, polígono ABCD...) y somételos a una traslación de vector asociado (3 , -1). Los objetos transformados se suelen nombrar con la siguiente notación: P´ , A´B´ , r´ , etc.; empléala. Recuerda que a los puntos correspondientes entre una figura y su transformada se les llama puntos homólogos.

2- Comprueba, con las herramientas adecuadas de Cabri, qué propiedades se conservan al efectuar una traslación (longitud, alineación, paralelismo o perpendicularidad, ángulo y área)

3- Utiliza objetos similares a los que dibujaste en el ejercicio 1 y sométELOS a un giro G(O , 30º), siendo O un punto cualquiera del plano. Practica también a los objetos iniciales un giro G(O´ , -120º), donde O´

es un punto diferente a O. ¿Qué diferencia hay entre giros de ángulo positivo y negativo?

4- Comprueba de nuevo las propiedades qué se conservan en este movimiento.

5- Sigue el esquema de los ejercicios anteriores pero practicando ahora a los objetos una simetría axial de eje cualquiera e y una simetría central de centro O.

6- Las transformaciones que has realizado se denominan isometrías. ¿De dónde crees que viene este nombre? ¿Por qué crees que se les llama también movimientos "rígidos"? Y una cuestión de *culturilla* matemática: a estas transformaciones también las podemos llamar Transformaciones Euclídeas

7- Traslaciones, giros y simetrías centrales son *isometrías directas*, y la simetría axial es una *isometría inversa*. ¿Qué caracteriza a cada una de ellas?

8- Vamos a practicar ahora con Cabri la composición de movimientos; recuerda que para componer dos movimientos debes aplicar el primero de ellos al objeto inicial; obtendrás un transformado; a este transformado le aplicas el segundo movimiento y ya tienes el objeto final, resultado de la composición.

9- Empezaremos componiendo traslaciones. Dibuja un polígono ABCD... (como tú quieras, regular o no, convexo o cóncavo, con el número de lados que prefieras) y somételo a dos traslaciones sucesivas, de vectores asociados u(-2,4) y v(-1,1). ¿Cuál es el movimiento resultante? ¿Cómo queda caracterizado? ¿Varía la cosa si aplicamos primero la traslación de vector v y a continuación la de vector u?

10- Composición de giros: dibuja otro polígono y aplícale ahora dos giros sucesivos del mismo centro O y diferente amplitud, por ejemplo G(O , 150º) y G´(O , -45º). ¿Cuál es el movimiento resultante? ¿Cómo queda caracterizado? ¿Se cumple aquí la propiedad conmutativa?

11- Composición de dos simetrías centrales: sigue el mismo esquema que en los ejercicios anteriores y contesta a las mismas preguntas para dos simetrías de centros diferentes, O y O´. Comprueba la conmutatividad (o no conmutatividad) en la composición de simetrías centrales.

12- Idem para dos simetrías axiales de ejes paralelos e y e´. ¿Se verifica la propiedad conmutativa?

13- Como el ejercicio 12 pero con ejes que formen entre sí un ángulo de 60º.

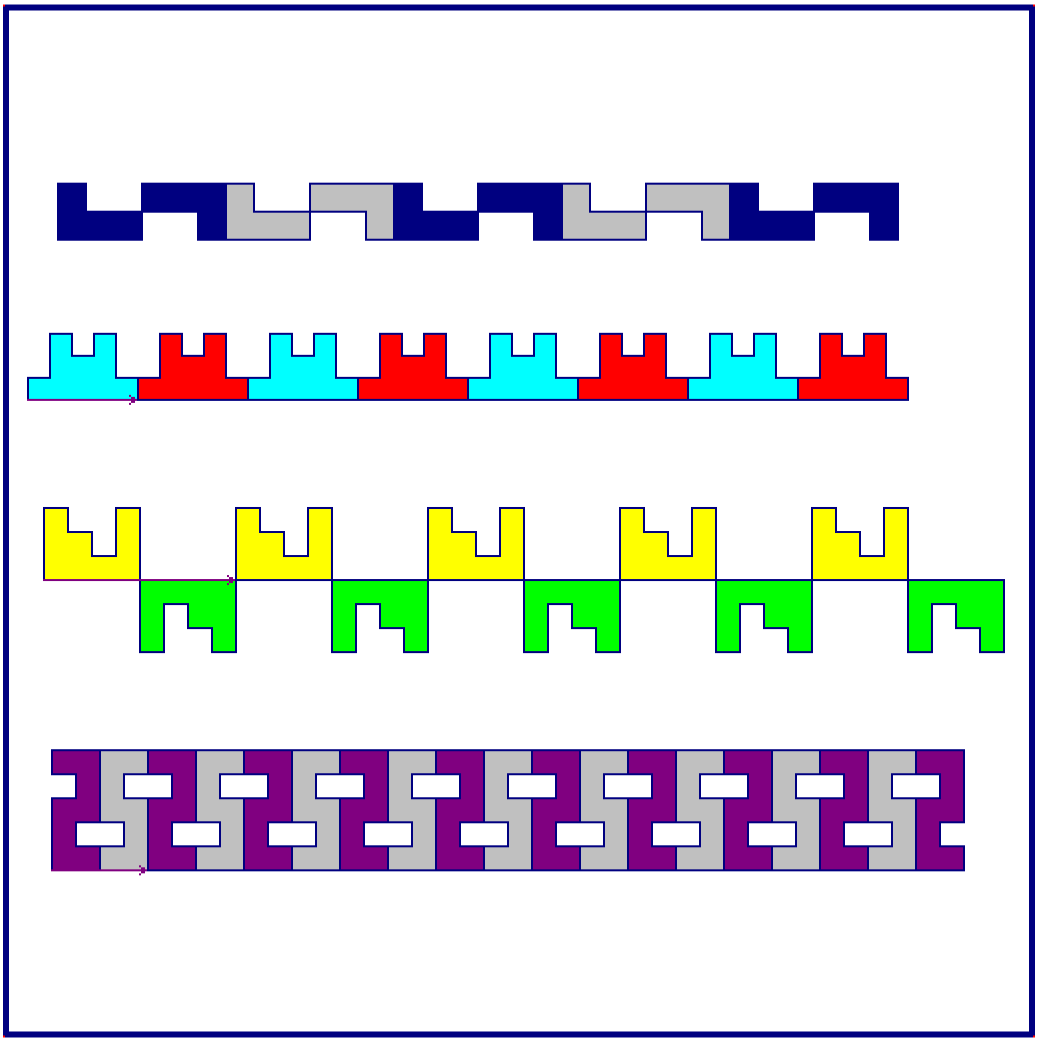
14- Pasemos a componer isometrías de distinto tipo; empezamos componiendo un giro G(O , 60º) con una simetría axial de eje e. Dibuja un polígono cualquiera y aplícale: a)primero el giro y luego la simetría. ¿Podrías pasar directamente del polígono inicial al final mediante uno solo de los movimientos estudiados? b) Aplica ahora primero la simetría y luego el giro. ¿Obtienes el mismo resultado que en a)? ¿Se cumple, por tanto, la propiedad conmutativa en la composición de un giro con una simetría axial?

15- Vamos a componer ahora un giro G(O , 45º) con una traslación de vector asociado v(-2 , 3). ¿Se verifica aquí la propiedad conmutativa?

16- Tras componer isometrías vamos ahora a descomponerlas. Empezaremos con una traslación de vector v(3 , 4). Estudiaste en el ejercicio 12 la composición de dos simetrías axiales; comprobaste que el movimiento resultante en esta composición es una traslación cuyo vector asociado "mide" dos veces la distancia entre ejes y además es perpendicular a ambos. ¿Serías capaz de encontrar una composición de simetrías axiales que te dé como resultado la traslación T_v? Hazlo con Cabri, sobre un polígono cualquiera ABCDE, y comprueba que esta descomposición no es única.

17- En el ejercicio 13 viste que cuando compones dos simetrías axiales cuyos ejes forman entre sí un ángulo a, el movimiento resultante es un giro G(O , 2 a), siendo O el punto de intersección entre los dos ejes. Vayamos en sentido contrario: descompón un giro G(O , 130º) en el producto de dos simetrías axiales. Emplea como figura inicial un polígono cualquiera ABCDE. ¿Es única la descomposición?

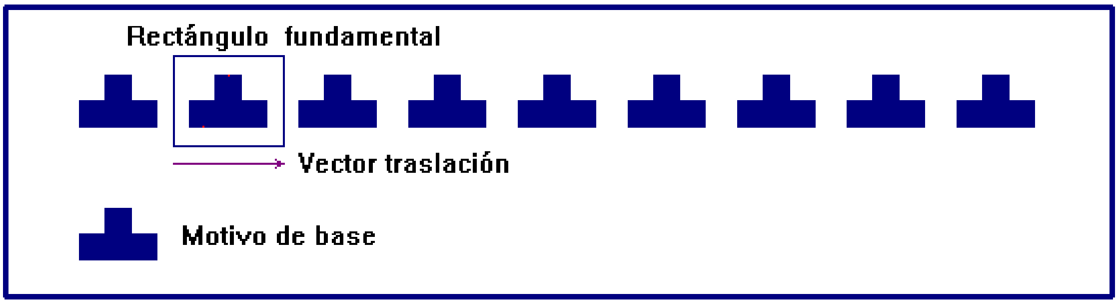
18- Para descansar un poco de tanto ejercicio de comprobación vamos a dedicar un rato a dar rienda suelta a nuestra creatividad: vas a construir un friso. Un **friso** (greca o cenefa, se les llama en lenguaje coloquial) se obtiene trasladando un motivo de base; este motivo de base, a su vez, se puede generar aplicando diversas isometrías a un elemento más pequeño. Elabora tu motivo de base y construye un friso con él. Aquí tienes algunos ejemplos, por si la inspiración tarda en venir.



APLICACIÓN: **FRISOS**

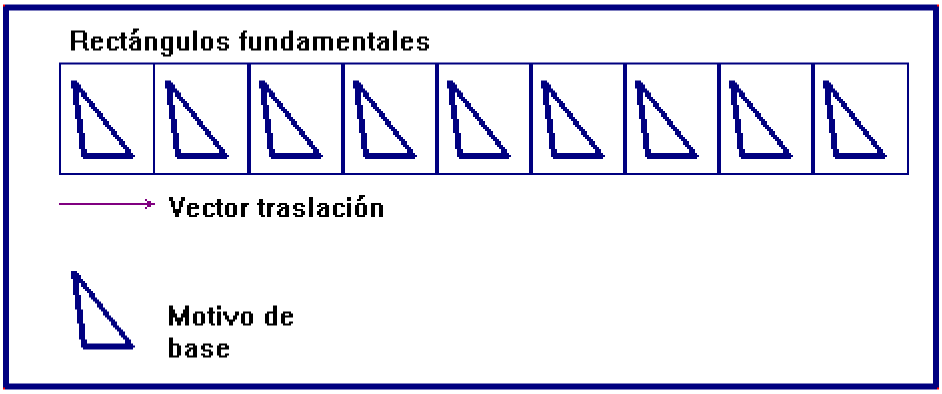
DEFINICIÓN: un friso es una banda plana que se genera mediante la traslación de un *motivo de base*.

EJEMPLO:

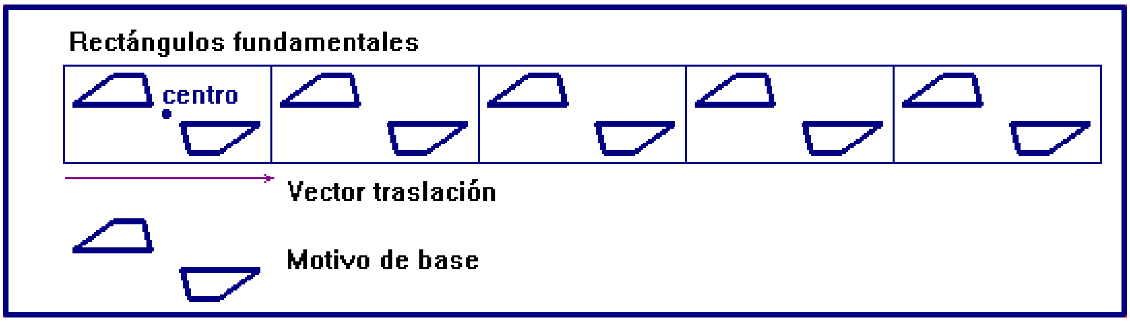


A su vez, el motivo de base puede contener distintos movimientos (isometrías) que lo generan:

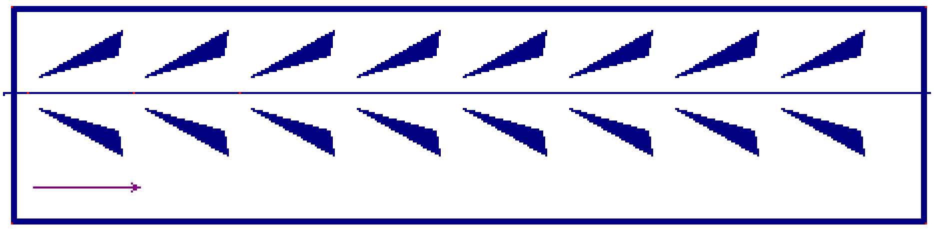
A) Traslaciones



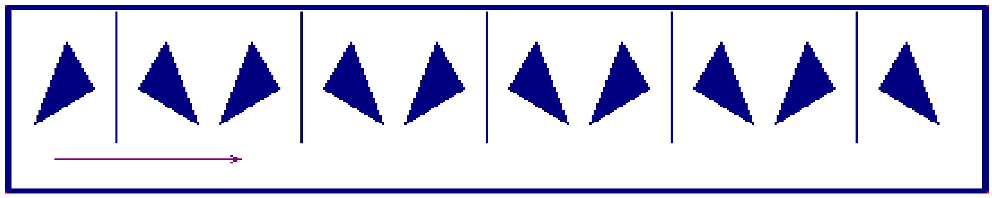
B) Giros cuyo centro esté en lo que se llama *recta central del friso* y ángulo 180º (o simetrías centrales)



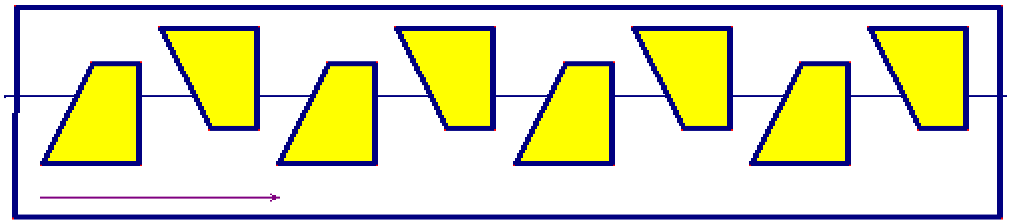
C) Simetría de eje horizontal (coincidente con la recta centro del friso)



D) Simetrías verticales (de eje perpendicular a la recta centro)

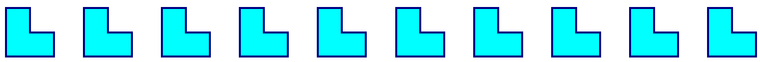


E) Simetrías horizontales con deslizamiento

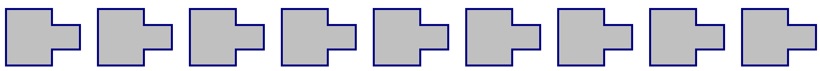


CLASIFICACIÓN DE FRISOS

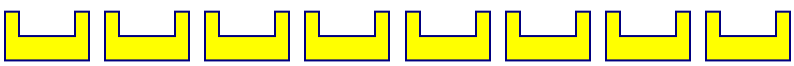
F_1: hay traslación, pero no hay giros, ni simetrías horizontales ni verticales.



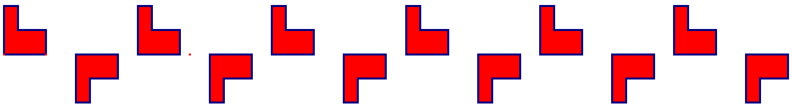
F_1^1: hay simetría horizontal y traslación.



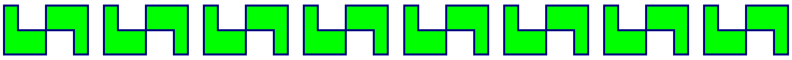
F_1^2: hay simetría vertical y traslación.



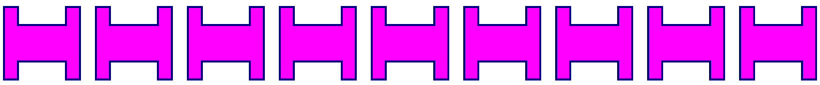
F_1^3: hay simetría horizontal con deslizamiento y traslación.



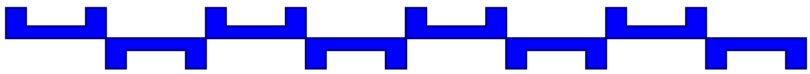
F_2: hay giro (180º) y traslación.



F_2^1: hay simetría horizontal y vertical (por tanto giro de 180º) y traslación.



F_2^2: hay simetría vertical y giro y traslación



ALGORITMO PARA LA CLASIFICACIÓN DE FRISOS

-¿Presenta simetría horizontal y vertical? Entonces es un F_2^1

-¿Presenta simetría horizontal? Entonces es un F_1^1

-¿Presenta simetría central? Entonces es un F_2

-¿Presenta simetría vertical y giro? Entonces es un F_2^2

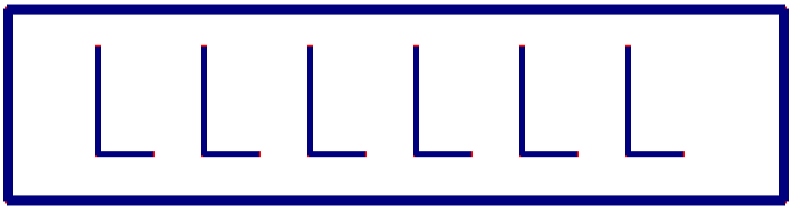
-¿Presenta simetría vertical? Entonces es un F_1^2

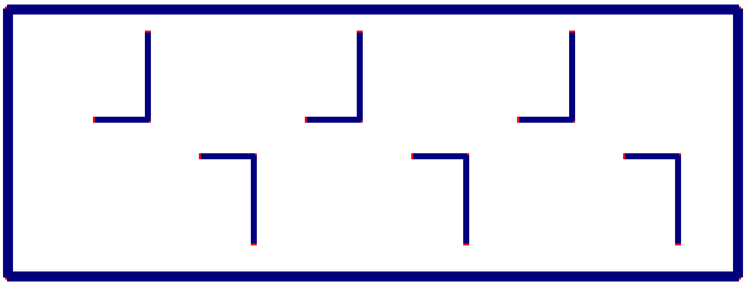
-¿Presenta simetría horizontal con deslizamiento? Entonces es un F_1^3

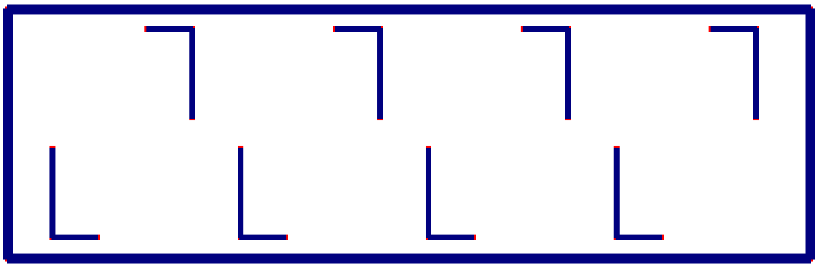
-¿No presenta simetría? Entonces es un F_1

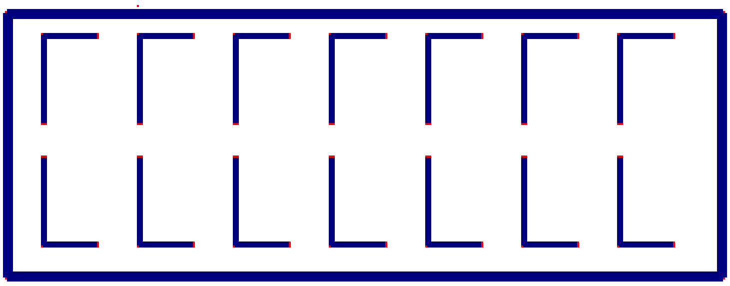
EJERCICIOS

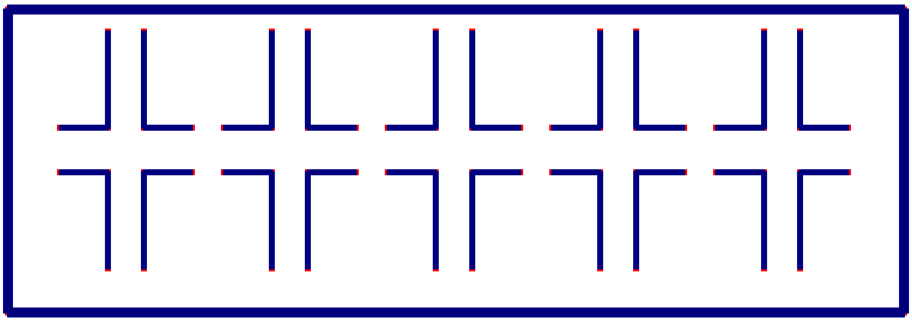
1- Identifica los siguientes frisos:

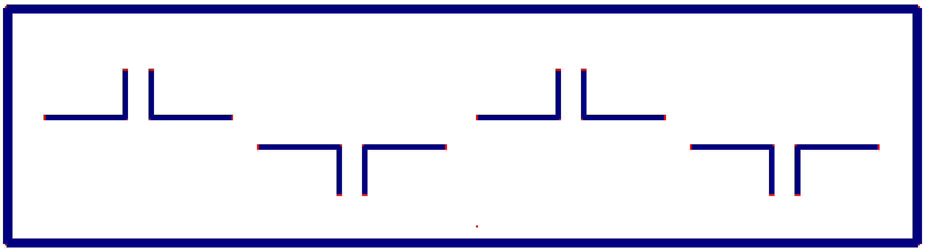


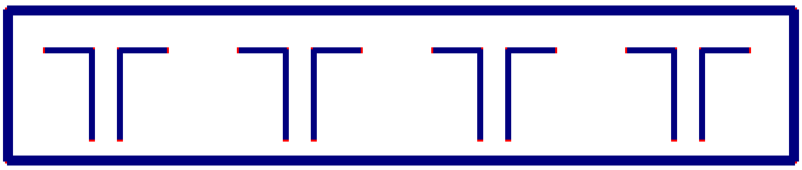




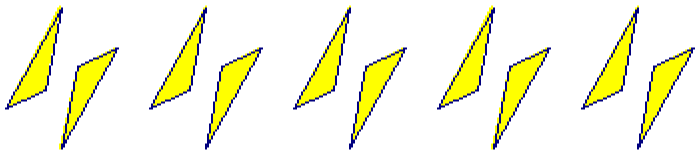


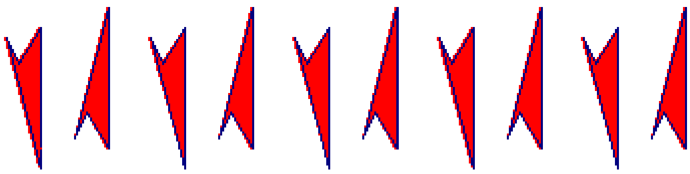


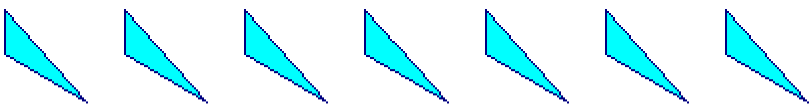


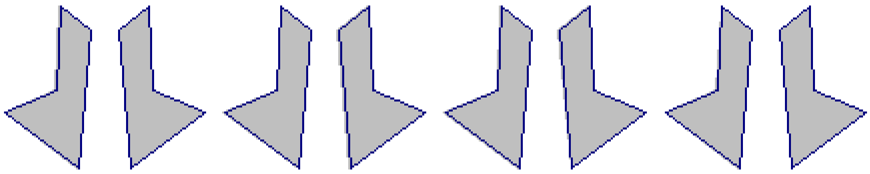


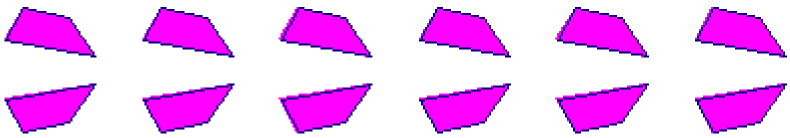
2- Busca el motivo de base, señala el rectángulo fundamental, el vector asociado a la traslación que genera el friso y clasifica:

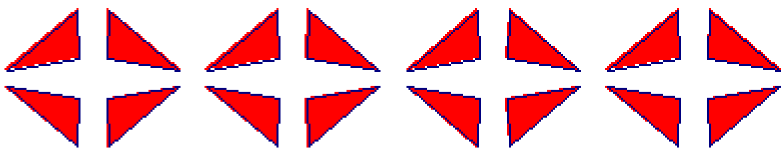


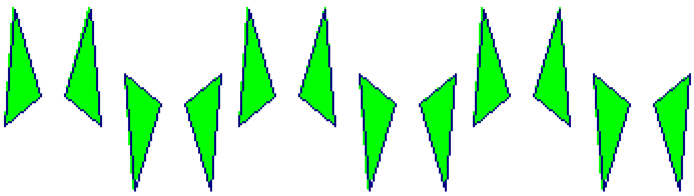












3- Identifica los movimientos que conservan el diseño:

A) AAAAAAAAAA

B) BBBBBBBBBB

C) XXXXXXXXXX

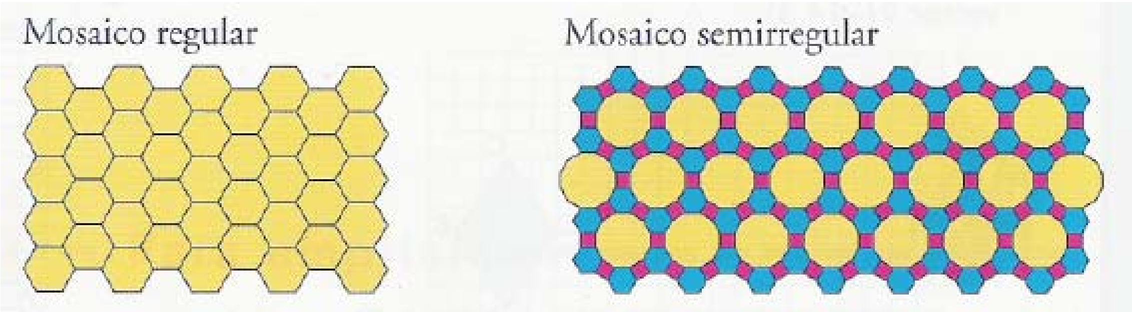
D) FFFFFFFFFF

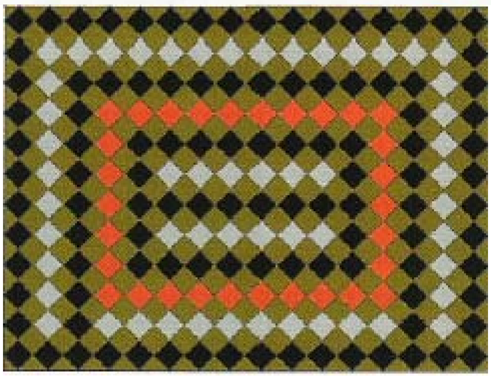
E) NNNNNNNNNN

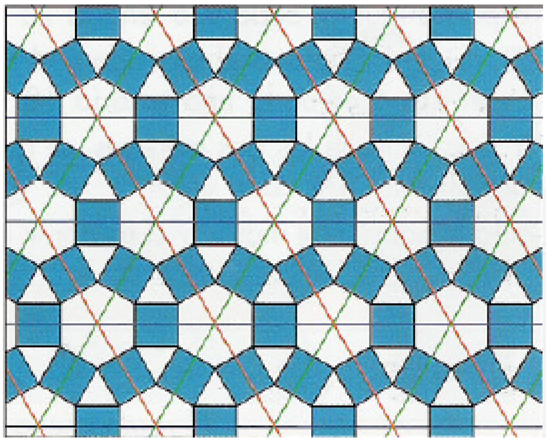
F) dbpqdbpqdbpq

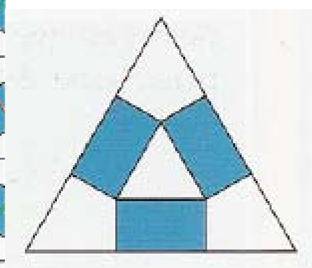
G) bdbdbdbdbdbd

Utilizando estos movimientos podemos construir también **mosaicos**









y **rosetones**.